

DEVOIR SURVEILLÉ 1**Durée : 4h**

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 3 pages, est constitué de 10 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – Pour chacune des assertions qui suivent :

1. Écrire la négation.
2. Déterminer si l'assertion est vraie ou fausse. Si l'assertion est vraie, on en fera la démonstration. Si l'assertion est fausse, on démontrera que la négation est vraie.

$$A : \ll \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y < x + 1. \gg$$

$$B : \ll \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 = y^3. \gg$$

$$C : \ll \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (y > x \implies y^2 < x^2). \gg$$

$$D : \ll \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq 0 \text{ OU } x < e^y). \gg$$

Exercice 2 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'assertion suivante :

« Si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 4, alors l'entier n est pair. »

1. Écrire la contraposée de cette assertion.
2. Montrer que cette contraposée est vraie.
3. Que conclure quant à la valeur de vérité de l'assertion de départ?
(expliquer sommairement)

Exercice 3 – Résoudre les équations ou inéquations d'inconnue réelle x suivantes :

$$(E_1) \quad |x - 1| = |3 - x|$$

$$(E_2) \quad |x - 1| + |3 - x| > 7$$

$$(E_3) \quad \sqrt{2 - x} = x + 1$$

$$(E_4) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \leq 2.$$

Exercice 4 – Montrer que toute fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $f = g + h$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0 et h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel a tel que pour tout x réel, $h(x) = a \exp(x)$.

Exercice 5 –

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2^{n+2} - 3$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 6$, on a $2^n \geq (n+2)^2$.

Exercice 6 – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n.$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (-2)^n$.

Exercice 7 – Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle, en commençant par déterminer le domaine de définition de chaque équation.

1. $\tan(2x) = 1$.
2. $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos(x)$.
3. $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 8 – Soit θ un paramètre réel. On considère l'équation du second degré suivante, d'inconnue réelle x :

$$(E) \quad x^2 - 2\cos(\theta)x + (2\cos(2\theta) - 1) = 0.$$

1. (a) Montrer que le discriminant Δ de cette équation vaut $12\sin^2(\theta)$.
(b) Discuter suivant les valeurs de θ le nombre de solutions réelles de (E) .
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que (E) ne possède qu'une seule solution. Déterminer cette solution.

On suppose désormais que θ est choisi de sorte que l'équation (E) possède deux solutions réelles.

3. (a) Donner en fonction de θ les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation (E) . On pourra écrire x_1 et x_2 sous la forme $a \cos(\theta + \varphi)$ où a et φ sont réels.
(b) Déterminer pour quelles valeurs du réel θ le nombre $\sqrt{2}$ est une solution de l'équation (E) .

Exercice 9 – Partie I

1. *Méthode 1 : calcul de $\cos \frac{\pi}{8}$.*
 - (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
 - (b) En s'aidant de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. *Méthode 2 : calcul de $\cos \frac{\pi}{8}$.*
 - (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
 - (b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est une solution de l'équation :

$$8X^4 - 8X^2 + 1 = 0 \quad \text{d'inconnue } X \in \mathbb{R}$$

- (c) Déterminer les racines du trinôme $8u^2 - 8u + 1$ de la variable $u \in \mathbb{R}$.
 - (d) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en justifiant avec soin.
3. (a) Déterminer les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

- (b) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{371\pi}{8}\right)$.
4. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sin^4(\theta) = \frac{1}{8} \cos(4\theta) - \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{3}{8}$$

- (b) En déduire $\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis justifier avec soin que la valeur trouvée est compatible avec un résultat trouvé en 3.(a).

Partie II

5. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cos(3x) - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sin(3x) = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right)$$

- (b) En déduire la résolution de l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cos(3x) - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sin(3x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

- (c) Représenter les solutions de l'équation (E) sur un cercle trigonométrique, puis préciser celles qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
6. Résoudre l'inéquation $2 \cos(x) > \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
On fera une figure soignée pour justifier le résultat.

Exercice 10 – Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) + f(y)| = |x + y|. \quad (E)$$

1. (a) On définit $f_1 : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{matrix}$. Montrer que f_1 vérifie (E).

- (b) On définit $f_2 : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{matrix}$. Montrer que f_2 vérifie (E).

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \iff (\forall x \in \mathbb{R}, [f(x) = x \text{ Ou } f(x) = -x]).$$

3. On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).

- (a) Montrer que $f(0) = 0$.
 (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|$.
 (c) i. Écrire la négation de

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ Ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x).$$

- ii. En raisonnant par l'absurde, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ Ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x).$$

4. Conclure. On précisera bien le raisonnement utilisé.