

# CORRIGÉ CONCOURS BLANC

## Problème 1

### Partie I

I.1 Soient  $P, Q$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_2[X]$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= (\widetilde{\lambda P + Q})(1)(X - 1)^2 + (\widetilde{\lambda P + Q})'(1) \\ &= \lambda(\widetilde{P})(1)(X - 1)^2 + \widetilde{P}'(1) + \widetilde{Q}(1)(X - 1)^2 + \widetilde{Q}'(1) \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q) \end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est linéaire. Ses ensembles de départ et d'arrivée sont identiques, donc c'est un endomorphisme.

I.2 (a) Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ . Alors,

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \widetilde{P}(1)X^2 - 2\widetilde{P}(1)X + (\widetilde{P}(1) + \widetilde{P}'(1)) = 0 \\ &\iff \widetilde{P}(1) = \widetilde{P}'(1) = 0 \\ &\iff 1 \text{ est racine au moins double de } P \end{aligned}$$

Comme  $P$  est de degré au plus 2, avoir 1 pour racine au moins double signifie s'écrire de la forme  $P = \lambda(X - 1)^2$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

D'où  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}((X - 1)^2)$ .  $(X - 1)^2$  est non-nul donc  $((X - 1)^2)$  est une base de  $\text{Ker}(\varphi)$ .

(b) Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $F$  est un espace vectoriel, alors, pour tout  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $u$  est de rang fini et :

$$\dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u) = \dim(E).$$

(c)  $\mathbb{R}_2[X]$  est de dimension 3, donc on peut appliquer le théorème du rang à  $\varphi$ .

D'après la question I.2.(a),  $\text{Ker}(\varphi)$  est de dimension 1, d'où

$$\dim(\mathfrak{S}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2.$$

(d) D'après l'expression de  $\varphi$ , les images des polynômes par  $\varphi$  sont des combinaisons linéaires de  $(X - 1)^2$  et 1, donc  $\mathfrak{S}(\varphi) \subset \text{Vect}(1, (X - 1)^2)$ .  $(1, (X - 1)^2)$  est libre (polynômes non-nuls de degrés différents), donc  $\text{Vect}(1, (X - 1)^2)$  est de dimension 2.

Or,  $\mathfrak{S}(\varphi)$  est aussi de dimension 2, donc  $\mathfrak{S}(\varphi) = \text{Vect}(1, (X - 1)^2)$ .

I.3 (a) La colonne déjà présente rassemble les coordonnées de  $\varphi(1)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

$$\varphi(X) = 1 \times (X - 1)^2 + 1 = X^2 - 2X + 2.$$

$$\varphi(X^2) = 1 \times (X - 1)^2 + 2 = X^2 - 2X + 3.$$

On en déduit que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

(b) En calculant, on obtient

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Par propriété des matrices d'applications linéaires,  $A^3$  est la matrice de  $\varphi^3$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ , donc  $\varphi^3$  est l'application nulle.

Comme  $A$  et  $A^2$  ne sont pas la matrice nulle,  $\varphi$  et  $\varphi^2$  ne sont pas nulles.

Ainsi,  $\varphi$  est nilpotent d'indice 3.

- I.4 (a) La famille  $\mathcal{B}$  est une famille de 3 polynômes non-nuls de  $\mathbb{R}_2[X]$  et de degrés différents, donc c'est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- (b) On calcule que :  $\varphi(U) = 0$ ,  $\varphi(V) = U$  et  $\varphi(W) = V$ , donc la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) On rappelle que  $P$  rassemble, colonne par colonne, les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{C}$ . On a donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) En utilisant la formule de changement de base du cours, on obtient  $T = P^{-1}AP$ .

## Partie II

- II.1 Soit  $y \in \mathfrak{S}(f)$ . Soit  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ . Alors,  
 $f(y) = f(f(x)) = 0$  car  $f^2$  est l'application nulle. Donc  $y \in \text{Ker}(f)$   
 D'où  $\mathfrak{S}(f) \subset \text{Ker}(f)$ .

- II.2  $E$  est dimension finie, donc d'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\mathfrak{S}(f)) = 3.$$

D'après la question précédente, on a que  $\dim(\mathfrak{S}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f))$ , donc

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) \geq 3,$$

c'est-à-dire  $2 \dim(\text{Ker}(f)) \geq 3$ .

- II.3 De la question précédente, comme la dimension d'un espace vectoriel est un entier,  $\dim(\text{Ker}(f))$  doit être supérieure à 2. Mais comme  $\text{Ker}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui est dimension 3,  $\dim(\text{Ker}(f))$  est inférieur ou égal à 3.

Si c'était 3, alors on aurait  $\text{Ker}(f) = E$  et ainsi  $f$  serait l'application nulle, ce qui est absurde. Donc  $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ .

Le théorème du rang nous donne alors que  $\dim(\mathfrak{S}(f)) = 1$ .

- II.4 (a) La famille  $(e_1, e_2)$  est libre. En particulier,  $e_1$  est donc non-nul.  
 $e_3$  est un antécédent d'un vecteur non-nul par  $f$ , donc n'est pas dans le noyau de  $f$ . On en déduit que  $e_3$  n'est pas une combinaison linéaire de  $e_1$  et  $e_2$ , donc  $(e_1, e_2, e_3)$  est libre.
- (b) Comme on connaît les images de chacun des vecteurs de  $\mathcal{B}$  par  $f$ , on a immédiatement que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Partie III

III.1 On note  $k$  l'indice de nilpotence de  $f \circ g$ . Donc  $(f \circ g)^k = \theta$ . Alors,

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{k+1} &= (g \circ f) \circ (g \circ f) \circ \dots \circ (g \circ f) \\ &= g \circ (f \circ g)^k \circ f \\ &= g \circ \theta \circ f \\ &= \theta \end{aligned}$$

Donc  $g \circ f$  est nilpotent.

III.2 (a)

$$\begin{aligned} g \circ (\text{Id}_E - f) &= g - g \circ f \\ &= \text{Id}_E + f + \dots + f^{m-1} - (f + f^2 + \dots + f^m) \\ &= \text{Id}_E - f^m. \end{aligned}$$

Comme  $f^m$  est nulle, on en déduit que  $g \circ (\text{Id}_E - f) = \text{Id}_E$ .

(b) On déduit que la question précédente que

$(\text{Id}_E - f)$  est inversible (c'est donc un automorphisme) et que son inverse est  $g$ .

III.3 Notons  $m$  l'indice de nilpotence de  $f$ . On raisonne par l'absurde.

Si  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ , alors  $f$  est injective, donc bijective (car c'est un endomorphisme).

Ainsi,  $f^m$  est inversible d'inverse  $(f^{-1})^m$ , ce qui est absurde car  $f^m$  est l'application nulle qui n'est pas bijective.

Donc  $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ .

### Partie IV

IV.1 Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $x \in N_k$ . Alors  $f^k(x) = 0_E$ . Comme  $f$  est linéaire,  $f(0_E) = 0_E$ , donc  $f^{k+1}(x) = 0_E$  et  $x \in N_{k+1}$ .

D'où  $N_k \subset N_{k+1}$ .

IV.2 (a) D'après la question IV.1, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $N_k \subset N_{k+1}$ . On en déduit que  $\dim(N_k) \leq \dim(N_{k+1})$ , c'est-à-dire que  $u_k \leq u_{k+1}$ .

Donc  $u$  est croissante.

(b)  $u$  est croissante et majorée par  $n$ . En effet, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $N_k$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui est de dimension  $n$ , donc  $\dim(N_k) \leq n$ .

Ainsi  $u$  admet une limite finie.

(c)  $u$  est une suite convergente. Notons  $\ell$  sa limite. Alors, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite doivent être dans  $[\ell - \frac{1}{3}, \ell + \frac{1}{3}]$ . Or, tous les termes de  $u$  sont entiers et l'intervalle  $[\ell - \frac{1}{3}, \ell + \frac{1}{3}]$  est de largeur  $\frac{2}{3}$  donc contient au plus un entier  $j$ . On en déduit qu'à partir d'un certain rang,  $u$  ne prend plus que la valeur  $j$ , elle est donc stationnaire.

IV.3 D'après la question précédente, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u_p = u_{p+1}$ . Or, d'après IV.1,  $N_p \subset N_{p+1}$ . Comme on a une inclusion et l'égalité des dimensions,  $N_p = N_{p+1}$ .

IV.4 On va procéder par récurrence sur  $q \in \mathbb{N}^*$  pour montrer que  $N_{p+q+1} = N_{p+q}$ .

**Initialisation :** Pour  $q = 1$ , on a  $N_{p+1} = N_p$  par hypothèse.

**Hérédité :** Pour  $q \in \mathbb{N}$  fixé, on suppose que  $N_{p+q+1} = N_{p+q}$ .

On a déjà par la question IV.2.(a) que  $N_{p+q+1} \subset N_{p+q+2}$ . Montrons l'inclusion réciproque.

Soit  $x \in \ker(f^{p+q+2})$ . Alors  $f^{p+q+1}(f(x)) = 0_E$ . Donc  $f(x) \in \ker(f^{p+q+1}) = N_{p+q+1}$ .

Par hypothèse, on a donc  $f(x) \in N_{p+q}$ , c'est-à-dire que  $f^{p+q}(f(x)) = 0_E$ .

Donc  $f^{p+q+1}(x) = 0_E$ , soit  $x \in N_{p+q+1}$ . D'où  $N_{p+q+2} \subset N_{p+q+1}$  et l'égalité par double inclusion.

**Conclusion :** Par récurrence, on en déduit que  $N_{p+q} = N_p$  pour tout  $q \in \mathbb{N}$

IV.5 (a)  $f^0 = \text{Id}_E$ , donc  $N_0 = \{0_E\}$  et  $u_0 = 0$ .

$f^m$  est l'application nulle, donc  $N_m = E$  et  $u_m = n$ .

(b) D'après la question III.3, le noyau d'un endomorphisme nilpotent n'est pas réduit à  $\{0_E\}$ , donc est de dimension au moins 1, c'est-à-dire  $u_1 \geq 1$ .

(c) Pour  $p = m$ , on a  $f^p = f^m = \theta$  et  $f^{p+1} = \theta \circ f = \theta$ . Donc les applications  $f^p$  et  $f^{p+1}$  sont toutes les deux nulles et  $N_p = N_{p+1}$ . Ainsi, d'après la question IV.4,  $u$  est stationnaire à partir du rang  $m$ .

Si elle était stationnaire à partir de  $k \in \mathbb{N}$ , avec  $k < m$ , alors, comme  $m$  est le plus petit indice tel que  $f^m$  soit l'application nulle,  $f^k$  n'est pas nulle et son noyau n'est pas  $E$  tout entier, c'est-à-dire  $N_k \neq E$  et  $u_k < n$ . Or  $u_m = n \neq u_k$ , donc cela contredit que  $u$  est stationnaire à partir du rang  $k$ .

Ainsi,  $u$  est stationnaire à partir du rang  $m$  et pas avant.

Comme  $u_m = n$ , elle stationne à la valeur  $n$ .

(d) On en déduit qu'avant le rang  $m$ , deux termes consécutifs de  $u$  n'ont jamais la même valeur. Or,  $u$  est une suite d'entiers, donc pour tout  $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ ,  $u_{m+1} \geq u_m + 1$ . Comme  $u_0 = 0$ , on en déduit facilement par récurrence finie que pour tout  $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ ,  $u_k \geq k$ .

En  $k = m$ , on obtient que  $n \geq m$ .

## Problème 2

### Partie I

I.1 On effectue le changement de variable  $x = \frac{\pi}{2} - u$  d'où  $dx = -du$ . On obtient alors :

$$W_n = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left( \frac{\pi}{2} - u \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u) dx$$

I.2 On a  $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$  et  $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ .

I.3 Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1} t - \sin^n t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t (\sin t - 1) dt \leq 0$$

puisque pour tout  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $0 \leq \sin t \leq 1$ , donc  $\sin^n t (1 - \sin t) \geq 0$ . La suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme pour tout  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $0 \leq \sin t$ , donc  $0 \leq \sin^n t$ . Par positivité de l'intégrale, on a  $W_n \geq 0$ . La suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée, elle converge par le théorème de la limite monotone.

- I.4 Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par l'absurde, supposons que  $W_n = 0$ . Comme la fonction  $t \mapsto \sin^n(t)$  est continue et positive sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on en déduit que la fonction  $t \mapsto \sin^n(t)$  est nulle sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ce qui est absurde (elle vaut 1 en  $\frac{\pi}{2}$ ). Ainsi,  $W_n \neq 0$ .
- I.5 Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par intégration par parties, les fonctions  $t \mapsto \cos t$  et  $t \mapsto \sin^{n+1} t$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \times \sin^{n+1} t = [\cos t \sin^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (n+1) (-\cos t \sin^n t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

On en déduit que  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$  puis que  $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$ .

- I.6 Pour  $n \in \mathbb{N}$ , Notons  $J_n = (n+1)W_n W_{n+1}$ . On a

$$J_{n+1} - J_n = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_nW_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n - (n+1)W_nW_{n+1} = 0$$

donc  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante, de valeur  $W_0 = W_0 W_1 = \frac{\pi}{2}$ .

- I.7 Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq I_n$  (car la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante). Comme  $W_n > 0$  (d'après les questions 2 et 3), on en déduit que :

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

avec la question 4.

Le théorème d'encadrement nous donne alors  $\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  donc  $W_n \sim_n W_{n+1}$ .

- I.8 On sait  $W_{n+1} \sim_n W_n$  donc  $J_n \sim_n nW_n^2$ . Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J_n = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi,  $nW_n^2 \sim_n \frac{\pi}{2}$ . Finalement, on en déduit que  $W_n \sim_n \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$ .

- I.9 De la relation de récurrence de la question 4, on obtient, pour  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1) \times (2p-3)}{(2p)(2p-2)} I_{2p-4} \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)}{(2p)(2p-2)(2p-4)} I_{2p-6} = \dots = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \times \dots \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2} W_0 \\ &= \frac{[(2p-1) \times (2p-3) \times \dots \times 1] \times [(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2]}{[(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2]^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} I_{2p-3} \\ &= \frac{(2p)(2p-2)(2p-4)}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)} I_{2p-5} = \dots = \frac{(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \dots \times 3} W_1 \\ &= \frac{[(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2]^2}{[(2p+1) \times (2p-1) \times \dots \times 3] \times [(2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2]} \\ &= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

**Partie II**

II.1 La fonction  $F$  est une primitive de  $x \mapsto e^{-x^2}$  (continue sur  $\mathbb{R}$ ), elle est donc dérivable, et pour  $x \in \mathbb{R}, F'(x) = e^{-x^2} > 0$ .  $F$  est donc strictement croissante.

II.2 Pour  $x \in [1, +\infty[$ , on a  $1 \leq x$ , donc en multipliant par  $x > 0, x \leq x^2$  et  $-x^2 \leq -x$ . En appliquant  $\exp$ , croissante sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ .

II.3 Soit  $x \in [1, +\infty[$ . Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt = F(1) + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq F(1) + \int_1^x e^{-t} dt \\ &= F(1) + [-e^{-t}]_1^x = F(1) + e - e^{-x} \leq F(1) + e \end{aligned}$$

puisque, par la question précédente, pour tout  $t \in [1, x], e^{-t^2} \leq e^{-t}$ , donc par croissance de l'intégrale,  $\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt$ . Par suite,  $F$  est croissante et majorée ( par  $F(1) + e$  ). Elle admet donc une limite en  $+\infty$ .

II.4 Soit  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto u - \ln(1+u)$ .  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont), et pour  $u \in ]-1, +\infty[$ ,  $f'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$  est de même signe que  $u$ .  $f$  est donc décroissante sur  $] -1, 0 ]$  et croissante sur  $[0, +\infty[$ , donc admet un minimum en 0.

On a  $f(0) = 0$ , donc pour tout  $u \in ]-1, +\infty[$ ,  $f(u) \geq f(0) = 0$ , ce qui montre que  $\ln(1+u) \leq u$ .

II.5 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Pour  $t \in [0, \sqrt{n}[$ , la question précédente donne (puisque  $-\frac{t^2}{n} \in ]-1, 0[$ )  $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}$ . Comme  $n > 0$ , on en déduit que  $n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -t^2$  et comme  $\exp$  est croissante,

$$\exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \leq e^{-t^2} \text{ i.e. } \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}.$$

Cette dernière inégalité reste vraie lorsque  $t = \sqrt{n}$ , donc par croissance de l'intégrale,  $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$ .

(b) Le changement de variable  $t = \sqrt{n} \cos u$  équivaut à  $u = \arccos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ . Il donne  $dt = -\sqrt{n} \sin u du$  et les bornes deviennent  $\frac{\pi}{2}$  et 0 :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 u)^n (-\sqrt{n} \sin u) du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u)^n \sin u du \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du = \sqrt{n} W_{2n+1} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$$

II.6 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (a) Pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{t^2}{n} \in \mathbb{R}_+$ , et par la question 1,  $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$ . Comme  $-n < 0$ , on en déduit que  $-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \geq -t^2$ . Comme  $\exp$  est croissante on en déduit que :

$$e^{-t^2} \leq \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)\right) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

- (b) On pose le changement de variable  $t = \sqrt{n} \tan u$  dans l'intégrale proposée, qui équivaut à  $u = \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ . Ceci transforme  $dt$  en  $\sqrt{n}(1 + \tan^2 u) du$  et les bornes en 0 et  $B = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 u)^{-n} \sqrt{n}(1 + \tan^2 u) du \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^{n-1} du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2p} u du \end{aligned}$$

avec  $p = n - 1$ .

- (c) On pose le changement de variable  $u = \frac{\pi}{2} - t$  pour trouver :

$$\int_0^B \cos^{2p} t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-B} \cos^{2p} \left(\frac{\pi}{2} - u\right) (-du) = \int_{\frac{\pi}{2}-B}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} u du$$

- (d) D'après la question (b) et par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} t dt = \sqrt{n} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} u du \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

puisque  $\sin^{2n-2} u \geq 0$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

II.7 D'après les questions 6. et 7., on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

Or, d'après A.8, on a  $\sqrt{n} W_{2n+1} \sim_n \sqrt{n} W_{2n} \sim_n \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$  d'où  $\sqrt{n} W_{2n+1} \sim_n \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De même,  $\sqrt{n} W_{2n-2} \sim_n \sqrt{n} W_{2n} \frac{\pi}{4} \sim_n \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

### Partie III

III.1 Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \ln((n+1)!) + n + 1 - (n+1)\ln(n+1) - \frac{1}{2}\ln(n+1) - \ln(n!) - n + n\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(n) \\
 &= \ln(n+1) + 1 - \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) \\
 &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
 &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
 &= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)
 \end{aligned}$$

III.2 Ainsi  $v_n - v_{n+1} \sim \frac{1}{12n^2}$ , donc  $v_n - v_{n+1} \geq 0$  à partir d'un certain rang. Par le critère des équivalents des séries à termes positifs,  $\sum (v_n - v_{n+1})$  converge. Ainsi  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  converge. La série  $S = \sum (v_{n+1} - v_n)$  converge. Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la  $n$ -ième somme partielle vaut  $S_n = v_{n+1} - v_0$  (somme télescopique), donc on en déduit que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.

III.3 Par continuité d'exponentielle,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge. Il existe donc  $k \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $n! \sim k\sqrt{nn^n}e^{-n}$ .

III.4 D'après la question I.7, on a pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :

$$1 \leq \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} \leq \frac{W_{2p-1}}{W_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}$$

Ainsi par le théorème des gendarmes,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}}$  existe et on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = 1$$

III.5 On a :

$$\frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = \frac{\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}}{\frac{4^p(p!)^2}{(2p+1)!}} = \frac{(2p+1)\pi}{2} \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2 \rightarrow 1$$

Ainsi, on a bien :

$$\frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \sim \frac{2}{2p+1} \left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \sim \pi.$$

III.6 Grâce à l'équivalent précédent, on en déduit que :

$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \sim p\sqrt{\pi}.$$

Or  $p! \sim k\sqrt{p}\left(\frac{p}{e}\right)^p$ , d'où en remplaçant dans l'expression :

$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \sim \frac{2^{2p}k^2p\left(\frac{p}{e}\right)^{2p}}{k\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}} = k\sqrt{\frac{p}{2}}$$

Finalement on obtient que  $\frac{k}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$ , soit encore  $k = \sqrt{2\pi}$ .

**Partie IV**

IV.1 Le lancé d'une pièce correspond à une expérience aléatoire à deux issues, pile ou face, avec la probabilité de succès  $p$  (pour pile par exemple). On répète  $n$  fois cette expérience, d'où une probabilité  $p_k$  d'avoir  $k$  succès égale à :

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

D'où dans le cas qui nous intéresse ( $p = 1/2$  car la pièce est équilibrée) :

$$p_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

En utilisant la formule de Stirling, on obtient :

$$p_n \sim \frac{1}{4^n} \frac{\sqrt{4n\pi} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2n\pi \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

Ainsi, on a bien que  $p_n \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ .

IV.2 On calcule la somme partielle de cette série pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{2k+1}{2k-1} \right)^k - n \\ &= \ln \left( \frac{(2n+1)^n (2n-1)^{n-1} \dots 3^1}{(2n-1)^n (2n-3)^{n-1} \dots 1^1} \right) - n \\ &= \ln \left( \frac{(2n+1)^n}{(2n-1)(2n-3)\dots 1} \right) - \ln(e^n) \\ &= \ln \left( \frac{(2n+1)^n (2n)(2n-2)\dots 2}{(2n)! \times e^n} \right) \\ &= \ln \left( \frac{(2n+1)^n 2^n n!}{(2n)! \times e^n} \right) \end{aligned}$$

Or on a avec la formule de Stirling :

$$\frac{(2n+1)^n 2^n n!}{(2n)! \times e^n} \sim \frac{(2n+1)^n 2^n \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}}{\sqrt{4\pi n} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}} \times e^n} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \frac{2n+1}{2n} \right)^n$$

Comme enfin  $\left( \frac{2n+1}{2n} \right)^n = \exp \left( n \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right) \rightarrow e^{1/2}$ , on en déduit finalement que  $\sum u_n$  converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} (1 - \ln(2)).$$