Concours blanc

Durée : 12 épisodes de « L'île aux enfants », dessin animé dans lequel apparaît Casimir.

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction !!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Bon courage !

Problème 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n. On note Id_E l'application identité de E, et θ l'endomorphisme nul. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f^k l'endomorphisme de E défini par récurrence par $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $f^{k+1} = f^k \circ f$.
Autrement dit, si $k \geqslant 1$, alors $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

On dit qu'un endomorphisme f de E est <u>nilpotent</u> s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = \theta$. Pour un tel endomorphisme, on appelle <u>indice de nilpotence</u> de f le plus petit entier naturel m tel que $f^m = \theta$.

Partie I : Un exemple

On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \widetilde{P}(1)(X-1)^2 + \widetilde{P}'(1). \end{array}$

I.1 Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

I.2 (a) Déterminer une base du noyau de φ et préciser sa dimension.
(b) Citez le théorème du rang en toute généralité.
(c) En déduire la dimension de l'image de φ.
(d) Déterminer une base de l'image de φ.

I.3 On note $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
(a) En expliquant vos calculs, complétez les colonnes de la matrice A, qui est la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{C}$:

$$A = M_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ -2 & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(b) Calculer A^2 et A^3.
(c) Quel est l'endomorphisme φ^3 ? En déduire que φ est nilpotent et préciser son indice de nilpotence.

I.4 On note $U = 1 - 2X + X^2$, $V = 1$ et $W = -1 + X$.
(a) Justifier que $\mathcal{B} = (U, V, W)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
(b) Sans utiliser de matrice de passage, déterminer la matrice T représentant φ dans la base $\mathcal{B}$.
(c) Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.
(d) Donner le lien matriciel unissant les matrices A, P et T.

Partie II : Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension 3

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3 et soit f un endomorphisme nilpotent non nul de E.
On suppose que l'indice de nilpotence de f vaut 2, autrement dit $f \neq \theta$ et $f^2 = \theta$.

II.1 Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

II.2 En déduire que $2 \times \dim(\text{Ker}(f)) \geqslant 3$.

II.3 En déduire que $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.

II.4 Soit (e_1) une base de $\text{Im}(f)$, soit e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base de $\text{Ker}(f)$.
Soit e_3 un antécédent de e_1 par f.

(a) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

(b) Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

Partie III : Quelques propriétés

L'ensemble E est à nouveau un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

III.1 Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de E tels que $f \circ g$ soit nilpotent.
Montrer que $g \circ f$ est nilpotent.

III.2 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent, et m son indice de nilpotence.
On note $g = \text{Id}_E + f + \ldots + f^{m-1}$.

(a) Calculer $g \circ (\text{Id}_E - f)$.

(b) En déduire que $\text{Id}_E - f$ est un automorphisme de E et donner une expression de $(\text{Id}_E - f)^{-1}$.

III.3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Montrer que $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$.

Partie IV : Noyaux itérés et étude de l'indice de nilpotence

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **quelconque** de E.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = \text{Ker}\left(f^k\right)$.

IV.1 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$.

IV.2 On considère la suite $\delta = \left(\delta_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ définie pour $k \in \mathbb{N}$ par $\delta_k = \dim\left(N_k\right)$.

(a) Quel est le sens de variation de δ ?

(b) Montrer que δ converge.

(c) En déduire que la suite δ est stationnaire.

IV.3 Montrer qu'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $N_p = N_{p+1}$.

IV.4 Soit $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $N_p = N_{p+1}$. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $N_p = N_{p+q}$.

IV.5 On suppose désormais que f est **nilpotent**, et on note m son indice de nilpotence. On se propose de montrer que $m \leqslant n$ (où $n = \dim E$).

(a) Expliciter N_0 et N_m et donner δ_0 et δ_m.

(b) Justifier que $\delta_1 \geqslant 1$.

(c) Montrer que la suite δ est stationnaire à partir du rang m, et pas avant. A quelle valeur stationne-t-elle ?

(d) Conclure.

Problème 2

Ce problème aborde les intégrales de Wallis, et certaines de leurs applications. Certaines questions de la partie I seront notamment utiles dans les parties II et III.

Partie I : Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

I.1 Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

I.2 Calculer W_0 et W_1.

I.3 Montrer que la suite (W_n) est décroissante puis montrer qu'elle converge.

I.4 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n \neq 0$.

I.5 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$$

I.6 Montrer que la suite $\big((n+1)W_{n+1}W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et calculer la valeur de cette constante.

I.7 En utilisant la monotonie de la suite (W_n), prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$

En déduire que $W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

I.8 Déduire des deux questions précédentes que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

I.9 Montrer que pour tout $p \geqslant 0$, on a :

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

Partie II : Intégrale de Gauss

On pose $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}$.

II.1 Montrer que F est strictement croissante.

II.2 Pour $x \in [1, +\infty[$, montrer que $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$.

II.3 En déduire que F est majorée puis que F admet une limite en $+\infty$.

Dans toute la suite, on notera $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ cette limite.

II.4 Montrer que : $\forall u \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+u) \leqslant u$.

II.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx$.

(b) En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos u$, montrer que :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx$$

II.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

(b) En posant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan u$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n}\int_0^B \cos^{2p}(t)\,dt$$

où $B \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $p \in \mathbb{N}$ sont à déterminer.

(c) Montrer que $\displaystyle\int_0^B \cos^{2p}(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}-B}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t)\,dt$.

(d) Déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$$

II.7 Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Partie III : Formule de Stirling

Le but de cette partie est de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On considère les suites définies par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n \quad$ et $\quad v_n = \ln(u_n)$.

III.1 Montrer que $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{=} -\dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

III.2 En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (v_{n+1} - v_n)$ converge puis que la suite (v_n) converge.

III.3 Montrer alors qu'il existe $k > 0$ tel que : $\quad n! \underset{+\infty}{\sim} k\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

III.4 En utilisant un résultat de la partie I, montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = 1$.

III.5 En déduire que :

$$\frac{1}{p}\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} \pi.$$

III.6 Conclure que $k = \sqrt{2\pi}$.

Partie IV : Applications de la formule de Stirling

IV.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On jette $2n$ fois une pièce équilibrée. On note p_n la probabilité d'avoir n piles et n faces. Montrer que $\quad p_n = \dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{4^n} \quad$ puis en déduire que $\quad p_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

IV.2 Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) - 1.$$