

CORRIGÉ DEVOIR MAISON 9

Exercice 1 –

1. (a) On a $\cos(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)$ et $\sqrt{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$ donc

$$\cos(2x) - \sqrt{1+4x} \underset{x \rightarrow 0}{=} (1 - 2x^2 + o(x^3)) - (1 + 2x - 2x^2 + 4x^3 + o(x^3))$$

et donc $\cos(2x) - \sqrt{1+4x} \underset{x \rightarrow 0}{=} -2x - 4x^3 + o(x^3).$

- (b) Puisque $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-2x - 4x^3 + o(x^3)}{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} (-2 - 4x^2 + o(x^2)) \times \frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)}.$$

Or $\frac{1}{1-u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + o(u)$ donc $\frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$. On obtient alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (-2 - 4x^2 + o(x^2)) \left(1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2 - \frac{13}{3}x^2 + o(x^2).$$

Finalement, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2 - \frac{13}{3}x^2 + o(x^2).$

- (c) La fonction f possède un développement limité à l'ordre 2 en 0 donc *a fortiori* un développement limité à l'ordre 0 en 0, qui est $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2 + o(1)$. Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$ et donc f est prolongeable par continuité en 0. Son prolongement par continuité est la fonction

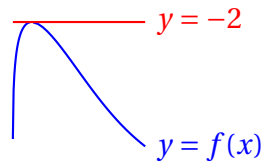
$$\begin{aligned} \tilde{f}: \left[-\frac{1}{4}; \pi[\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{\cos(2x) - \sqrt{1+4x}}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le développement limité de $\tilde{f}$ au voisinage de 0 est le même que celui de $f : \tilde{f}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2 - \frac{13}{3}x^2 + o(x^2)$. Comme $\tilde{f}$ a un développement limité à l'ordre 2 en 0, cette fonction a *a fortiori* un développement limité à l'ordre 1 en 0, qui est $\tilde{f}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2 + 0 \cdot x + o(x)$. On en déduit que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et que $\tilde{f}'(0) = 0$.

- (d) Puisque $\tilde{f}$ est dérivable en 0, son graphe admet une tangente $\mathcal{T}$ en 0 et une équation cartésienne de $\mathcal{T}$ est $y = -2$ (c'est une tangente horizontale). Comme $\tilde{f}(x) + 2 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{13}{3}x^2 + o(x^2)$, on a $\tilde{f}(x) + 2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{13}{3}x^2$. Les fonctions $x \mapsto \tilde{f}(x) + 2$ et $x \mapsto -\frac{13}{3}x^2$ ont donc même signe au voisinage de 0, et donc

le graphe de $\tilde{f}$ est en dessous de $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.

- (e) On a :



2. (a) En tant que fonction polynomiale, on a $1 + x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ donc $\sqrt{1 + x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

On en déduit que $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $h(x) = \frac{x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 + x^2}}$ donc pour tout $u \in \mathbb{R}^{+*}$

$$h\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\frac{1}{u} \cos(u)}{\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}}} = \frac{\cos(u)}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Or $\cos(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et $(1 + v)^{-1/2} \underset{v \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}v + o(v)$ donc

$$h\left(\frac{1}{u}\right) \underset{u \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) \left(1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right)$$

et finalement $h\left(\frac{1}{u}\right) \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u^2 + o(u^2)$.

- (c) On en déduit que

$$h(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

donc $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. (et donc $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$).

- (d) D'après ce qui précède, $g(x) - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - x = 0$ donc

le graphe de g possède une asymptote $\mathcal{A}$ en $+\infty$ dont une équation est $y = x$.

Comme $x \mapsto g(x) - x$ a même signe que $x \mapsto -\frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$, on peut affirmer que le graphe de g est en dessous de $\mathcal{A}$ au voisinage de $+\infty$.

- (e) On a :

