

DEVOIR MAISON 9

Exercice 1 –

1. On considère l'application :

$$f : \left[-\frac{1}{4}, \pi \right[\setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{\cos(2x) - \sqrt{1+4x}}{\sin x}.$$

(a) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$x \mapsto \cos(2x) - \sqrt{1+4x}.$$

(b) En déduire le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction f .

(c) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui, expliciter ce prolongement $\tilde{f}$ et indiquer s'il est dérivable en 0 (en précisant la valeur éventuelle de $\tilde{f}'(0)$).

(d) Le graphe de la fonction $\tilde{f}$ admet-il une tangente en 0? Si oui, en donner une équation cartésienne, et étudier la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

(e) Illustrer graphiquement les résultats obtenus.

2. On considère l'application :

$$g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(a) Déterminer un équivalent du dénominateur de g en $+\infty$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

On pose $h(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

(b) Expliciter le développement limité d'ordre 2 en 0 de $u \mapsto h\left(\frac{1}{u}\right)$.

(c) En déduire la valeur des réels a , b et c tels qu'au voisinage de $+\infty$ on ait :

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

(d) Interpréter ce résultat en terme d'asymptote à la courbe de g en $+\infty$, en précisant leurs positions relatives.

(e) Illustrer graphiquement les résultats obtenus.