

CORRIGÉ DEVOIR MAISON 8

Exercice 1 –

Partie I :

1. Soit $c \in \mathbb{C}$ et $P = c$ le polynôme constant égal à c . Alors, on a

$$P \text{ solution de } (E) \iff c = c \times c \iff c = 0 \text{ OU } c = 1$$

Conclusion, les polynômes constants solutions de (E) sont

$$P = 1 \text{ OU } P = 0$$

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $P = aX + b$. On suppose P de degré 1 i.e. $a \neq 0$. On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} P \text{ solution de } (E) &\iff a(X^2 - 1) + b = (a(X - 1) + b)(a(X + 1) + b) \\ &\iff aX^2 + b - a = (aX + b - a)(aX + b + a) \\ &\iff aX^2 + b - a = a^2X^2 + (ab + a^2 + ab - a^2)X + (b - a)(b + a) \\ &\iff aX^2 + b - a = a^2X^2 + 2abX + (b^2 - a^2). \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient

$$\begin{aligned} P \text{ solution de } (E) &\iff \begin{cases} a = a^2 \\ 0 = 2ab \\ b - a = (b - a)(b + a) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ -1 = -1 \end{cases} \quad \text{car } a \neq 0 \\ &\iff P = X \end{aligned}$$

Conclusion, l'unique polynôme de degré 1 solution de (E) est $P = X$.

3. On suppose pour toute la suite P non constant. On note $d = \deg(P)$.
Alors, par le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$.
Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P . On pose $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$$

4. On procède par récurrence. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $P(u_n) = 0$ ».

Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = a$ et par hypothèse a est une racine de P . Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ i.e. que u_n est une racine de P . Montrons alors que u_{n+1} est aussi une racine de P . Par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$. Alors on a

$$P(u_{n+1}) = P(u_n^2 + 2u_n) = P((u_n + 1)^2 - 1)$$

Donc en évaluant (E) en $X = u_n + 1$, on obtient que

$$P(u_{n+1}) = P(u_n + 1 - 1)P(u_n + 1 + 1) = P(u_n)P(u_n + 2).$$

Donc par hypothèse de récurrence,

$$P(u_{n+1}) = 0_{\mathbb{C}} \times P(u_n + 2) = 0_{\mathbb{C}}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ est une racine de } P$$

Partie II :

5. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n + 1 = (a + 1)^{2^n}$ ».

Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 + 1 = a + 1$ et $(a + 1)^{2^0} = (a + 1)^1 = a + 1$. Donc $u_0 + 1 = (a + 1)^{2^0}$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ i.e. $u_n + 1 = (a + 1)^{2^n}$ et montrons $\mathcal{P}(n + 1)$. Par construction de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$u_{n+1} + 1 = u_n^2 + 2u_n + 1 = (u_n + 1)^2$$

Donc par hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} + 1 = \left((a + 1)^{2^n} \right)^2 = (a + 1)^{2^n \times 2} = (a + 1)^{2^{n+1}}$$

Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 1 = (a + 1)^{2^n}$$

6. Par la question précédente, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = |u_n + 1| = |a + 1|^{2^n}$$

Posons $q = |a + 1|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = q^n$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = |a + 1|$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n = q^{2^n} = v_{2^n}$$

La fonction $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2^n \end{matrix}$ est strictement croissante et est donc une extractrice.

Conclusion, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite géométrique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison $q = |a + 1|$.

7. On a

- Si $|a + 1| > 1$, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et donc il en va de même de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Si $|a + 1| = 1$, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et il en va de même de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Si $|a + 1| \in]0; 1[$, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et donc il en va de même de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Si $|a + 1| = 0$, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 0 et il en va de même de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cependant ce cas n'est possible que si $a + 1 = 0$ i.e. $a = -1$ ce qui est exclu car $a \notin \mathbb{R}$ par hypothèse.

8. Nous venons de mentionner que $|a + 1| > 0$. Supposons que $|a + 1| \neq 1$. Alors d'après la question précédente, la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} = (|u_n + 1|)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement monotone et donc prend une infinité de valeurs. Donc $(u_n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ admet également une infinité de valeurs et de même pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P , donc dans ce cas P admet une infinité de racines et donc $P = 0$ ce qui contredit notre hypothèse de prendre P non constant. Conclusion,

$$\boxed{|a+1|=1}$$

9. On démontre de même que $|a - 1| = 1$, ce que l'on admet. Puisque $1 = |a + 1| = |a - (-1)|$, on en déduit que a est sur le cercle de centre -1 et de rayon 1 . De même $|a - 1| = 1$ implique que a est sur le cercle de centre 1 de rayon 1 . Or par un dessin, on s'aperçoit que l'unique point d'intersection de ces deux cercles est 0 . Donc $a = 0$ ce qui contredit le fait que $a \notin \mathbb{R}$. Conclusion,

P n'admet aucune racine non réelle.

Partie III

10. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $f(-1) = 1 - 2 = -1$. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	$+\infty$	-1	$+\infty$

On observe alors que l'ensemble image de f est $f(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$. En particulier,

$$u_1 = f(u_0) \in [-1; +\infty[.$$

11. On suppose $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$.

- (a) On note par la question précédente, la stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et le théorème de la bijection, on note que $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$. Donc $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f et $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$. Par suite, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, on observe que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n = u_n^2 + u_n + u_n > 0 + u_n = u_n$$

Conclusion,

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

- (b) Puisque la suite est strictement croissante, on en déduit que pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $p < q$, on a $u_p < u_q$ et donc $u_p \neq u_q$. Ainsi, l'ensemble

$$\{u_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \text{ est infini.}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P . On en déduit donc que P admet une infinité de racines. Conclusion,

$P = 0$ ce qui contredit le fait que P n'est pas constant.

12. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x + 2 - 1 = 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$. Or $g(-1/2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 2$. On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

- (b) Par la question 10 et le théorème de la bijection, on observe que $f(]-1;0]) =]-1;0[$. Donc $]-1;0[$ est stable par f . De plus, $u_1 \in]-1;0[$ et donc par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]-1;0[$. Donc par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g(u_n) < 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(u_n) < u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} < u_n$$

Donc

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

De plus elle est minorée par -1 donc par le théorème de convergence monotone,

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

On note ℓ sa limite. Par la stricte décroissance de la suite, $\forall n \geq 2, u_n < u_1$. Donc par passage à la limite, $\ell \leq u_1$. Or $u_1 < 0$ donc $\ell < 0$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(u_n) = u_{n+1}$ donc par passage à la limite et continuité de la fonction f , on a

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow f(\ell) - \ell = 0 \Leftrightarrow g(\ell) = 0$$

Donc par ce qui précède $\ell = -1$ ou $\ell = 0$. Or $\ell < 0$ donc $\ell = -1$. Conclusion,

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers -1.

- (c) Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement monotone, on en déduit qu'elle prend une infinité de valeurs différentes et donc P admet une infinité de racines. Conclusion,

$P = 0$ ce qui contredit le fait que P n'est pas constant.

13. Supposons que -1 soit une racine de P . Alors, pour $X = -2$, on a par (E),

$$P(4-1) = P(-2-1)P(-2+1) \Leftrightarrow P(3) = P(-3)P(-1) = 0$$

Dans ce cas, 3 est aussi une racine. En posant $u_0 = 3$, on trouve alors $u_1 = 9 + 6 = 15 \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui est impossible d'après la question 11. Conclusion,

-1 n'est pas une racine de P

Or on a vu que u_1 est forcément une racine de P . Donc $u_1 \neq -1$. Par les questions précédentes, nous savons déjà que $u_1 \in [-1; +\infty[$ mais que les cas $u_1 > 0$ et $u_1 \in]-1;0[$ sont impossibles. Conclusion,

$$u_1 = 0$$

14. Par la question précédente, on a

$$f(a) = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ OU } a = -2$$

Cependant si $a = -2$, alors en prenant $X = -3$, on a

$$P(8) = P((-3)^2 - 1) = P(-3 - 1)P(-3 + 1) = P(-4) \times 0 = 0.$$

Donc 8 est une racine de P . Cependant si $u_0 = 8$, alors $u_1 = 64 + 16 > 0$ ce qui est impossible. Donc $a \neq -2$. Conclusion,

$$\boxed{\text{L'unique racine de } P \text{ est } a = 0}$$

15. Puisque 0 est l'unique racine possible de P dans $\mathbb{C}$, on en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $P = X^n$.

Synthèse. Vérifions si ce polynôme fonctionne. Si $P = X^n$, alors on a

$$P(X^2 - 1) = (X^2 - 1)^n = ((X - 1)(X + 1))^n = (X - 1)^n (X + 1)^n = P(X - 1)P(X + 1),$$

et (E) est vérifiée. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \{0_{\mathbb{C}[X]}\} \cup \{X^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Exercice 2 –

Partie 1 - Polynôme dérivé d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}[X]$

- « le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ » signifie que P se décompose en un produit de polynômes de degré 1 à coefficients réels.
- La décomposition attendue est :

$$\boxed{P(X) = \lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

- Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, l'ordre de multiplicité de α_k en tant que racine de P' est $\boxed{m_k - 1}$.

- On obtient ainsi $\boxed{\sum_{k=1}^p (m_k - 1) = n - p}$ racines comptées avec multiplicité (puisque, P étant scindé, on a $\sum_{k=1}^p m_k = n$).

- Puisque $P(\alpha_k) = P(\alpha_{k+1}) = 0$ et que P est continue sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ et dérivable sur $] \alpha_k, \alpha_{k+1} [$ (car sur $\mathbb{R}$ entier), d'après le théorème de Rolle,

$$\boxed{\exists \beta_k \in] \alpha_k, \alpha_{k+1} [\mid P'(\beta_k) = 0.}$$

On obtient ainsi $p - 1$ racines supplémentaires distinctes (car elles se trouvent dans des intervalles deux à deux disjoints) pour P' .

- Avec ces nouvelles racines on a donc $n - p + (p - 1) = n - 1$ racines comptées avec multiplicité de P' . Puisque $\deg(P') = n - 1$ car $n \geq 2$,

$$\boxed{P' \text{ est scindé sur } \mathbb{R}.}$$

- La décomposition attendue est :

$$P(X) = n\lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k-1} \prod_{k=1}^{p-1} (X - \beta_k).$$

Partie 2 - Polynômes de Legendre

1. Par le calcul,

$$L_0 = 1, L_1 = 2X, L_2 = 12X^2 - 4.$$

2. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré $2n$, en le dérivant n fois, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(L_n) = n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque le monôme de plus haut degré de P_n vaut X^{2n} ,

$$\text{le coefficient dominant de } L_n \text{ est } \prod_{k=0}^{n-1} (2n - k) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

4. On procède par récurrence sur k , et on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}_k : \ll P_n^{(k)}(X) = (-1)^k P_n^{(k)}(-X) \gg.$$

Initialisation : On a $P_n^{(0)}(X) = P_n(X) = (X^2 - 1)^n = (-1)^0 P_n^{(0)}(-X)$ car P_n est pair, donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_k$ soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned} P_n^{(k+1)}(X) &= (P_n^{(k)})'(X) \\ &= (-1)^k \times (-P_n^{(k+1)}(-X)) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (-1)^{k+1} P_n^{(k+1)}(-X) \end{aligned}$$

et donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie. Par principe de récurrence,

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, P_n^{(k)}(X) = (-1)^k P_n^{(k)}(-X).$$

En particulier pour $k = n$ on obtient $L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)$, donc :

$$L_n \text{ a la même parité que } n.$$

5. (a) Puisque P_n est divisible par $(X - 1)^n$, 1 est racine d'ordre au moins n de P_n , et comme $(X+1)^n$ est non nul en 1, 1 est racine d'ordre exactement n de P_n . Il en va de même pour -1 , donc ces deux réels sont encore racines des polynômes dérivés jusqu'à la dérivée $(n-1)$ -ième :

$$\text{pour tout } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0.$$

Par contre, comme 1 et -1 ne sont pas racines de P_n d'ordre $n+1$,

$$L_n(1) \neq 0 \text{ et } L_n(-1) \neq 0.$$

- (b) D'après la première partie, puisque P_n est scindé (car il est de degré n et ses racines 1 et -1 sont de multiplicité n chacune) on en déduit :

$$P'_n \text{ est scindé sur } \mathbb{R}[X] \text{ et ses racines sont dans } [-1; 1].$$

Si on note alors a (respectivement b) la plus petite racine (respectivement la plus grande) de P'_n , en réappliquant le résultat de la première partie, on obtient que P''_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que ses racines sont comprises entre a et b , a fortiori entre -1 et 1 :

$$P''_n \text{ est scindé sur } \mathbb{R}[X] \text{ et ses racines sont dans } [-1; 1].$$

- (c) Par récurrence immédiate avec le résultat de la question précédente, et puisque -1 et 1 ne sont pas racines de L_n ,

$$L_n \text{ est scindé sur } \mathbb{R}[X] \text{ et ses racines sont dans }]-1; 1[.$$

6. En dérivant simplement $P_{n+1}(X) = (X^2 - 1)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P'_{n+1} = 2(n+1)XP_n.$$

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P''_{n+1} &= 2(n+1)P_n + 2(n+1)XP'_n \\ &= 2(n+1)P_n + 4n(n+1)X^2P_{n-1} \\ &= 2(n+1)P_n + 4n(n+1)(X^2 - 1)P_{n-1} + 4n(n+1)P_{n-1} \\ &= 2(n+1)P_n + 4n(n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P''_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dérivant n fois la relation (1), on obtient :

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(n+1)} &= L_{n+1} \\ &= 2(n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{(k)} P_n^{(n-k)} \\ &= 2(n+1) \binom{n}{0} X P_n^{(n)} + 2(n+1) \binom{n}{1} P_n^{(n-1)} \\ &= 2(n+1)XL_n + 2n(n+1)P_n^{(n-1)}. \end{aligned}$$

On en déduit que $P_n^{(n-1)} = \frac{1}{2n(n+1)} (L_{n+1} - 2(n+1)XL_n)$, et en dérivant à présent $n-1$ fois la relation (2), on obtient :

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(n+1)} &= L_{n+1} \\ &= 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)P_{n-1}^{(n-1)} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1)}{2n(n+1)} (L_{n+1} - 2(n+1)XL_n) + 4n(n+1)L_{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$nL_{n+1} = (2n+1)(L_{n+1} - 2(n+1)XL_n) + 4n^2(n+1)L_{n-1},$$

et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, L_{n+1} = 2(2n+1)XL_n - 4n^2L_{n-1}.$$

8. On a vu que pour tout $p \in \mathbb{N}$, L_{2p+1} est impair, donc

$$\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, L_{2p+1}(0) = 0.$$

On procède par récurrence sur p , et on pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{K}_p : \ll L_{2p}(0) = (-1)^p \left(\frac{(2p)!}{p!} \right)^2 \gg.$$

Initialisation : Pour $p = 0$ on a bien $L_0(0) = 1$ donc $\mathcal{K}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{K}_p$ soit vraie. Alors d'après la question précédente,

$$L_{2p+2}(0) - 4(2p+1)^2 L_{2p}(0)$$

d'où par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} L_{2p+2}(0) &= -(-1)^p 4(2p+1)^2 \left(\frac{(2p)!}{p!} \right)^2 \\ &= (-1)^{p+1} 4 \left(\frac{(2p+1)(2p+2)}{2p+2} \right)^2 \left(\frac{(2p)!}{p!} \right)^2 \\ &= (-1)^{p+1} \left(\frac{(2(p+1))!}{(p+1)!} \right)^2, \end{aligned}$$

c'est à dire que $\mathcal{K}_{p+1}$ est vraie. Par principe de récurrence,

$$\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, L_{2p}(0) = (-1)^p \left(\frac{(2p)!}{p!} \right)^2.$$