

DEVOIR MAISON 8

Exercice 1 – On considère l'équation $(E) : P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1)$, d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$.

Partie I :

1. Déterminer les polynômes constants solutions de (E) .
2. Déterminer les polynômes de degré 1 solutions de (E) .
3. On suppose pour toute la suite P non constant. On note $d = \deg(P)$. Quel théorème assure alors l'existence d'une racine de P dans $\mathbb{C}$?

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P . On pose $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P .

Partie II :

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 1 = (a + 1)^{2^n}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = |u_n + 1|$.

1. Montrer que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Discuter suivant les valeurs de $|a + 1|$ la monotonie de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire que $|a + 1| = 1$.
4. On démontre de même que $|a - 1| = 1$, ce que l'on admet. A l'aide d'un schéma, en déduire une contradiction.

Partie III :

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}$ et on définit :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 2x \end{array}$$

5. Préciser le tableau de variation de f puis justifier que $u_1 \in [-1; +\infty[$.
6. On suppose $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$.
 - (a) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
 - (b) En déduire une contradiction à propos de P .
7. On suppose que $u_1 \in]-1; 0[$.
 - (a) Déterminer le tableau de variation sur $\mathbb{R}$ de :

$$g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - x \end{array}$$

- (b) En déduire la stricte monotonie, la convergence puis la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (c) Retrouver la contradiction sur P .
8. Montrer que -1 n'est pas une racine de P . Que vaut u_1 ?
9. En déduire que l'unique racine réelle de P est 0.
10. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 2 – 1 - Polynôme dérivé d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}[X]$

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n \geq 2$ et scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

Il s'agit dans cette partie de démontrer que le polynôme dérivé P' est également scindé sur $\mathbb{R}[X]$ et de localiser ses racines.

On note $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les racines distinctes de P (nécessairement réelles, où $p \leq n$) et l'on note $m_1, m_2, \dots, m_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs (pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $m_k \geq 1$). On suppose que l'on a ordonné ces racines par ordre croissant, c'est-à-dire $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p$.

1. Expliquer ce que signifie la phrase : « le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}[X]$. »
2. On note λ le coefficient dominant de P . Écrire la décomposition de P en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
3. Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, donner sans justification l'ordre de multiplicité de α_k en tant que racine de P' (avec la convention qu'une racine de multiplicité 0 n'est pas une racine).
4. En tenant compte de leur multiplicité, en déduire que l'on trouve ainsi $n - p$ racines de P' .
5. Soit $k \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket$. En utilisant le théorème de Rolle, justifier que la fonction polynomiale $\tilde{P}'$ s'annule en un point β_k de l'intervalle $] \alpha_k, \alpha_{k+1} [$. Combien trouve-t-on ainsi de racines supplémentaires distinctes pour P' ?
6. En déduire que P' est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ et que toutes ses racines appartiennent à l'intervalle $[\alpha_1; \alpha_p]$.
7. Écrire la décomposition de P' en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Partie 2 - Polynômes de Legendre

On définit deux familles $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = (X+1)^n (X-1)^n = (X^2-1)^n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, L_n = P_n^{(n)}.$$

On rappelle que si Q est un polynôme et k un entier naturel, $Q^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de Q . La famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est connue sous le nom de polynômes de Legendre.

1. Calculer L_0, L_1 et L_2 .
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de L_n .
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de son coefficient dominant.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, P_n^{(k)}(X) = (-1)^k P_n^{(k)}(-X)$.
En déduire la parité de $\widetilde{L}_n$ en fonction de n .
5. On fixe $n \geq 2$.
 - (a) Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, la valeur de $\widetilde{P}_n^{(k)}(-1)$ et $\widetilde{P}_n^{(k)}(1)$. Cette valeur est-elle aussi celle de $\widetilde{L}_n(1)$ et $\widetilde{L}_n(-1)$?
 - (b) Montrer que P'_n et P''_n sont scindés et que toutes leurs racines sont dans $[-1; 1]$. (On pourra utiliser les résultats de la première partie.)
On peut démontrer par récurrence, mais on NE demande PAS de le faire, que, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le polynôme $P_n^{(k)}$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ et que toutes ses racines sont dans $[-1; 1]$.
 - (c) En déduire que L_n est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ et que toutes ses racines appartiennent à l'intervalle $] -1; 1 [$.

On peut démontrer, mais on ne demande pas de le faire, que les racines de L_n sont toutes simples.

6. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P'_{n+1} = 2(n+1)XP_n \quad (1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P''_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1} \quad (2)$$

7. En dérivant n fois la relation (1) et $n-1$ fois la relation (2), établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, L_{n+1} = 2(2n+1)XL_n - 4n^2L_{n-1}. \quad (3)$$

8. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\widetilde{L_{2p+1}}(0) = 0$.

Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\widetilde{L_{2p}}(0) = (-1)^p \left(\frac{(2p)!}{p!} \right)^2$.