

CORRIGÉ DEVOIR MAISON 7

Exercice 1 –

1. Montrons que l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ est stable par f :

Soit $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. On a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{3}$ donc $\frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{3}$ et puisque $\frac{5}{3} \leq 2$, on en déduit que $f(x) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. On a montré que si x appartient à $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, alors $f(x)$ appartient à $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Comme de plus $u_0 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, on peut affirmer que

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et a tous ses termes dans $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

2. Soit $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. On a $f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré vaut 5 et ses racines sont $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Seule la racine $r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ (puisque $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$), l'autre racine étant négative. Ainsi

la fonction f possède un unique point fixe r dans $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, donné par $r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

3. La fonction f est dérivable sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ de sorte que $|f'(x)| = \frac{1}{x^2}$. Si $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, on a $\frac{9}{4} \leq x^2$ et donc $\frac{1}{x^2} \leq \frac{4}{9}$. Finalement,

pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, on a $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

4. Tout d'abord, puisque f est continue sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, dérivable sur $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$ et vérifie $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$ pour tout $x \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$, l'inégalité des accroissements finis assure que f est $\frac{4}{9}$ -lipschitzienne sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n la propriété : $|u_n - r| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

- On a $u_0 = 2$ donc et $r \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ donc $|u_0 - r| \leq \frac{1}{2}$. Comme $\left(\frac{4}{9}\right)^0 = 1$, on a $|u_0 - r| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^0$ et H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie. On a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - r| &= |f(u_n) - f(r)| \\ &\leq \frac{4}{9} |u_n - r| && \text{car } f \text{ est } \frac{4}{9}\text{-lipschitzienne sur } \left[\frac{3}{2}, 2\right] \\ &\leq \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n && \text{d'après } H_n \end{aligned}$$

donc $|u_{n+1} - r| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$ et la propriété H_{n+1} est vraie.

Par récurrence, on a montré que $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } |u_n - r| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

5. Puisque $0 \leq \frac{4}{9} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$. D'après l'inégalité montrée à la question précédente,

on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - r| = 0$. Ainsi, $\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2 –

1. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors sa dérivée f' est continue sur $[a, b]$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout y compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, $\text{il existe } c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = y$.

2. Par opérations sur des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Pour tout x réel non-nul, on a

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est borné, on a que $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ converge vers 0 lorsque x tend vers 0. Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Si g était de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, comme $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, on aurait $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Or, $h : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0. On peut en effet considérer deux suites u et v définies par $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{2n\pi + \pi}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ces deux suites convergent vers 0, mais $f(u_n)$ et $f(v_n)$ n'ont pas la même limite. Donc g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

3. (a) f est dérivable donc continue sur le segment $[a, b]$. D'après le théorème des bornes atteintes, f admet un maximum M sur $[a, b]$ et

$\text{il existe } c \in [a, b] \text{ tel que } f(c) = M$.

(b) Pour tout $x \in]a, b]$, le taux d'accroissement de f entre a et x est :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Par hypothèse, f est dérivable en a et $f'(a) > 0$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$. Or, une expression ayant une limite strictement positive en un point est strictement positive au voisinage de ce point.

Donc il existe un voisinage $[a - r, a + r]$ de a avec $r > 0$, tel que pour tout x dans $[a - r, a + r] \cap]a, b]$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, c'est à dire que $f(x) - f(a)$ et $x - a$ sont de même signe.

Remarquons que $[a - r, a + r] \cap]a, b] =]a, a + r]$.

Or, pour tout $x \in]a, a + r]$, on a $x > a$ donc $x - a > 0$, d'où $f(x) - f(a) > 0$ et $f(x) > f(a)$.

(c) $f(a + r) > f(a)$. Donc a n'est pas un point où f atteint son maximum. Donc $c \neq a$.

(d) Pour tout $x \in [a, b]$, le taux d'accroissement de f entre x et b est : $\frac{f(x) - f(b)}{x - b}$.

Par hypothèse, f est dérivable en b et $f'(b) < 0$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0$. Or, une expression ayant une limite strictement négative en un point est strictement négative au voisinage de ce point.

Donc il existe un voisinage $[b - r', b + r']$ de b avec $r' > 0$, tel que pour tout x dans $[b - r', b + r'] \cap [a, b[$, $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0$, c'est à dire que $f(x) - f(b)$ et $x - b$ sont de signe opposé. Remarquons que $[b - r', b + r'] \cap [a, b[= [b - r', b[$.

Or, pour tout $x \in [b - r', b[$, on a $x < b$ donc $x - b < 0$, d'où $f(x) - f(b) > 0$ et $f(x) > f(b)$. $f(b - r') > f(b)$. Donc b n'est pas un point où f atteint son maximum. Donc $c \neq b$.

- (e) Ainsi, f est dérivable sur $[a, b]$, c est un point où f admet un extremum local et c n'est pas une extrémité de l'intervalle de définition de f . Donc, par le théorème reliant les extrema et la dérivée, $f'(c) = 0$.

4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit y compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

- Si $f'(a) = y$ (respectivement $f'(b) = y$), alors en posant $c = a$ (respectivement $c = b$), on a $f'(c) = y$. On suppose désormais que $y \neq f'(a)$ et $y \neq f'(b)$.
- Si $f'(a) > f'(b)$, on définit la fonction $g : \begin{array}{ccc} [a, b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - yx \end{array}$.

Alors g est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$g'(x) = f'(x) - y.$$

On en déduit donc $g'(a) = f'(a) - y$ et $g'(b) = f'(b) - y$.

Alors, comme $f'(a) > y > f'(b)$, on a que $f'(a) - y > 0$ et $f'(b) - y < 0$. C'est à dire que $g'(a) > 0$ et $g'(b) < 0$.

D'après les questions 3 à 7, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f'(c) = y$.

- Si $f'(a) < f'(b)$, on effectue le même raisonnement à partir de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [a, b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & yx - f(x) \end{array}$.

Dans tous les cas, $\boxed{\text{il existe } c \in [a, b] \text{ tel que } f'(c) = y}$, donc le théorème de Darboux est démontré.