

CORRIGÉ DEVOIR MAISON 6

Exercice 1 –

1. (a) On vérifie sans problème la réflexivité et la symétrie. Pour la transitivité :

Soit trois couples (p, q) , (p', q') et (p'', q'') de E tels que $(p, q) \sim (p', q')$ et $(p', q') \sim (p'', q'')$. On a donc $pq' = p'q$ et $p'q'' = p''q'$. On en déduit que $pq'q'' = p'qq'' = qp''q'$. Or $q' \neq 0$ et $\mathbb{Z}$ est intègre donc on peut simplifier : $pq'' = p''q$, on a bien $(p, q) \sim (p'', q'')$.

- (b) On cherche la classe d'équivalence du couple $(4, 6)$, autrement dit tous les couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $4q = 6p$, autrement dit $2q = 3p$. Ainsi $3p$ doit être un nombre pair donc p soit être un nombre pair : il existe k tel que $p = 2k$, d'où l'on déduit $2q = 6k$ c'est-à-dire $q = 3k$. Ainsi les couples sont de la forme $(2k, 3k)$ avec k entier, et réciproquement tous ces couples (avec $k \in \mathbb{N}^*$ pour que $q \in \mathbb{N}^*$) sont bien équivalents à $(4, 6)$. Ainsi $\text{cl}(4, 6)$ est formé de tous les couples de la forme $(2k, 3k)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Cette opération est clairement commutative :

$$\forall ((p, q), (r, s)) \in E^2, \quad (p, q) + (r, s) = (ps + qr, qs) = (rq + sp, sq) = (r, s) + (p, q)$$

Elle est également associative : $\forall ((p, q), (r, s), (t, u)) \in E^3$,

$$\begin{aligned} ((p, q) + (r, s)) + (t, u) &= (ps + qr, qs) + (t, u) = ((ps + qr)u + qst, qsu) = (psu + qru + qst, qsu) \\ (p, q) + ((r, s) + (t, u)) &= (p, q) + (ru + st, su) = (psu + q(ru + st), qsu) = (psu + qru + qst, qsu) \end{aligned}$$

- (b) On voit facilement que le couple $(e, f) = (0, 1)$ est élément neutre :

$$\forall (p, q) \in E, \quad (p, q) + (0, 1) = (p \times 1 + q \times 0, q \times 1) = (p, q).$$

3. (a) On remarque que $(4, 6) \sim (2, 3)$ car $4 \times 3 = 6 \times 2$ et de même $(3, 7) \sim (9, 21)$.

Or $(4, 6) + (3, 7) = (46, 42)$ et $(2, 3) + (9, 21) = (69, 63)$ et on a bien $(46, 42) \sim (69, 63)$ puisque $46 \times 63 = 42 \times 69$.

- (b) Dans le cas général, on suppose que $(p, q) \sim (p', q')$ et $(r, s) \sim (r', s')$, c'est-à-dire $pq' = p'q$ et $rs' = r's$. Montrons alors que $(p, q) + (r, s) = (ps + qr, qs)$ et $(p', q') + (r', s') = (p's' + q'r', q's')$ sont équivalents :

$$(ps + qr)(q's') = pq'ss' + qq'r's' = p'q'ss' + qq'r's = (p's' + q'r')(qs)$$

4. (a) L'addition est commutative et associative sur E et comme l'addition sur l'ensemble des classes d'équivalence ne dépend pas du représentant choisi, elle est également commutative et associative sur l'ensemble des classes d'équivalence.

- (b) La classe de l'élément neutre $\text{cl}((0, 1))$ est formée de tous les couples de la forme $(0, k)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(p, q) \in E$ et $(0, k)$ un couple appartenant à la classe du neutre. Alors $(p, q) + (0, k) = (pk, qk)$ qui est clairement équivalent à (p, q) (car $pkq = qkp$). Ainsi $\text{cl}((pk, qk)) = \text{cl}((p, q))$ et donc $\text{cl}((p, q)) + \text{cl}((0, 1)) = \text{cl}((p, q))$: la classe $\text{cl}((0, 1))$ est bien élément neutre pour l'addition des classes.

- (c) Soit $(p, q) \in E$ fixé. Considérons le couple $(-p, q)$. Alors $(p, q) + (-p, q) = (0, q^2)$ qui appartient à la classe de l'élément neutre. Ainsi $\text{cl}((p, q)) + \text{cl}((-p, q)) = \text{cl}((0, 1))$ et donc $\text{cl}((-p, q))$ est l'opposé de $\text{cl}((p, q))$ pour l'addition des classes.
5. (a) On reconnaît la multiplication sur $\mathbb{Q}$.
- (b) On reprend les mêmes idées avec la multiplication.
- (c) L'élément neutre est cette fois $\text{cl}(1, 1)$.
- (d) L'inverse d'un élément $\text{cl}(p, q)$ avec $p \neq 0$ est $\text{cl}(q, p)$.

Exercice 2 –**Partie I : étude de deux cas particuliers**

1. L'équation différentielle (E_1) est linéaire du second ordre à coefficients constants.
- L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $x^2 - 1 = 0$. Ses racines sont -1 et 1 donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' - y = 0$ est :

$$\{x \mapsto Ae^{-x} + Be^x \mid A, B \in \mathbb{R}\}$$

- Déterminons maintenant une solution particulière de (E_1) de la forme $^1y : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. La fonction y est clairement deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = 2ax + b \quad \text{et} \quad y''(x) = 2a$$

donc :

$$\begin{aligned} (y \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y(x) = x^2 + x + 1) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, -ax^2 - bx + (2a - c) = x^2 + x + 1) \\ &\iff \begin{cases} -a = 1 \\ -b = 1 \\ 2a - c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit qu'une solution particulière de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -x^2 - x - 3$

- On conclut donc que :

$$\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \{x \mapsto Ae^{-x} + Be^x - x^2 - x - 3 \mid A, B \in \mathbb{R}\}$$

2. On a déjà résolu l'équation homogène à la question précédente. Déterminons une solution particulière sous la forme $^2y : x \mapsto Axe^x$ où $A \in \mathbb{R}$. La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = A(x+1)e^x \quad \text{et} \quad y''(x) = A(x+2)e^x$$

donc :

$$\begin{aligned} (y \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y(x) = e^x) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, A(x+2)e^x - Axe^x = e^x) \\ &\iff 2A = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{x}{2}e^x$. On conclut donc que :

$$\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ x \mapsto Ae^{-x} + Be^x + \frac{x}{2}e^x \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Partie II : Étude du cas général

3. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(a) \operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a) \operatorname{sh}(b) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \times \frac{e^b + e^{-b}}{2} - \frac{e^a + e^{-a}}{2} \times \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{(e^a - e^{-a})(e^b + e^{-b}) - (e^a + e^{-a})(e^b - e^{-b})}{4} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-a-b} - e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{e^{a-b} - e^{-(a-b)}}{2} \\ &= \operatorname{sh}(a-b) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a) \operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a) \operatorname{sh}(b)$$

La deuxième identité se démontre de manière analogue.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1$$

4. En utilisant la formule établie à la question 3.(a), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x (\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(t) - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(t)) g(t) dt = \int_0^x (\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(t) g(t) - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(t) g(t)) dt$$

d'où l'on tire, en utilisant la propriété de linéarité de l'intégrale, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t) g(t) dt - \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t) g(t) dt$$

5. Les fonctions $\operatorname{ch} \times g$ et $\operatorname{sh} \times g$ sont continues sur $\mathbb{R}$ comme produits de fonctions qui le sont.

On en déduit que les fonctions $x \mapsto \int_0^x \operatorname{ch}(t) g(t) dt$ et $x \mapsto \int_0^x \operatorname{sh}(t) g(t) dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions ch et sh sont également dérivables sur $\mathbb{R}$, la f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produits de fonctions qui le sont et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t) g(t) dt + \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x) g(x) - \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t) g(t) dt - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x) g(x) \\ &= \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t) g(t) dt - \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t) g(t) dt \\ &= \int_0^x (\operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(t)) g(t) dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième relation établie à la question 3.(a), on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) g(t) dt$$

6. D'après l'égalité (1), et en utilisant le même raisonnement que celui mené à la question précédente, on obtient que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) &= \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t) g(t) dt + \operatorname{ch}(x)^2 g(x) - \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t) g(t) dt - \operatorname{sh}(x)^2 g(x) \\ &= (\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2) g(x) + \int_0^x (\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(t) - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(t)) g(t) dt \\ &= g(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) g(t) dt \\ &= g(x) + f(x)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - f(x) = g(x)$$

D'après ce qui précède, la fonction $x \mapsto \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) g(t) dt$ est solution de (E_g) sur $\mathbb{R}$. Quant à l'équation homogène, elle a été résolue à la question 1. On conclut donc que :

$$\text{l'ensemble des solutions de } (E_g) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ x \mapsto A e^{-x} + B e^x + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) g(t) dt \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 3 –

1. (a) f_n est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables sur I avec un dénominateur ne s'annulant pas sur I et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I$,

$$\begin{aligned}f'_n(x) &= \frac{1}{n!} \frac{n(\ln x)^{n-1} x - 2x(\ln x)^n}{x^4} = \frac{(\ln x)^{n-1}}{n! x^3} (n - 2 \ln x) \\ \text{or } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, \frac{(\ln x)^{n-1}}{n! x^3} &\geq 0 \text{ ainsi } f'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n}{2} \geq \ln x \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{n}{2}} \\ \text{comme } n \geq 1 \text{ alors } \frac{n}{2} &\geq \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\frac{n}{2}} \geq e^0 = 1 \\ f_n \text{ est croissante sur } [1; e^{\frac{n}{2}}[&\text{ et décroissante sur }]e^{\frac{n}{2}}; +\infty[\end{aligned}$$

$$(b) \text{ La valeur maximale de } f_n \text{ sur } I \text{ est } f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{1}{n!} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{e^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e}\right)^n \text{ donc } y_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

$$(c) \forall x > 1, \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} \times \frac{n! x^2}{(\ln x)^n} = \frac{\ln x}{n+1}.$$

$$(d) \forall n \in \mathbb{N}^*, y_{n+1} = f_{n+1}\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) = \frac{\left(\ln e^{\frac{n+1}{2}}\right)^{n+1} \ln e^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)n!} = \frac{\ln e^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$\text{Conclusion : } y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}$ donc $e^{\frac{n+1}{2}} > e^{\frac{n}{2}}$ car la fonction exp est strictement croissante

donc $f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) < f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)$ car f_n est strictement décroissante sur $[e^{\frac{n}{2}}, +\infty[$

$$\text{donc } y_{n+1} < \frac{1}{2} y_n$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n.$$

- (e) La suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante; elle est minorée par 0 donc elle converge.
D'après le résultat précédent on prouve aisément par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$$

de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq y_n$ par définition de y_n .

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$ et sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ alors d'après le théorème d'encadrement il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$

2. (a) On effectue une intégration par parties en posant

$$u: t \mapsto -\frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v: t \mapsto \ln t$$

les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$. Alors,

$$\forall x \geq 1, I_1(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dx = \left[\frac{-1}{t} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t^2} dt = \frac{-\ln x}{x} + \left[\frac{-1}{t} \right]_1^x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

$$\text{Conclusion : } I_1(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1.$$

- (b) On effectue une intégration par parties en posant

$$u: t \mapsto -\frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v: t \mapsto (\ln t)^{k+1}$$

les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$. Alors,

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1, I_{k+1}(x) &= \frac{1}{(k+1)!} \int_1^x \frac{(\ln t)^{k+1}}{t^2} dx = \frac{1}{(k+1)!} \left(\left[\frac{-1}{t} (\ln t)^{k+1} \right]_1^x + \int_1^x \frac{(k+1)(\ln t)^k}{t^2} dt \right) \\ &= -\frac{1}{(k+1)!} \frac{(\ln x)^{k+1}}{x} + I_k(x) \end{aligned}$$

- (c) D'après le résultat précédent on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n I_{k+1}(x) - I_k(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$$

on reconnait des sommes télescopique donc on obtient en posant $j = k + 1$

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= I_1(x) - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{(j)!} \frac{(\ln x)^j}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{(j)!} \frac{(\ln x)^j}{x} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{(j)!} \frac{(\ln x)^j}{x} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{(\ln x)^k}{k!x}$$

3. Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel fixé.

- (a) Par positivité de l'intégrale on a déjà $0 \leq I_n(\alpha)$

Par ailleurs puisque y_n est le maximum de f_n on a $\forall t \in [1; \alpha], f_n(t) \leq y_n$ donc $\int_1^\alpha f_n(t) dt \leq y_n(\alpha - 1)$ par croissance de l'intégrale.

Conclusion : $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1)y_n$

- (b) D'après le théorème d'encadrement sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\alpha) = 0$$

4. Pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$ on pose $w_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(\ln x)^k}{k!}$

(a) $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} w_n(x)$ donc $w_n(x) = x - x I_n(x)$

Conclusion : $\forall n \geq 1, \forall x \geq 1, w_n(x) = x - x I_n(x)$

(b) Ainsi, $w_n(\alpha) = \alpha - I_n(\alpha)$ donc d'après le résultat du 4 b :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n(\alpha) = \alpha$$

(c) On pose $\alpha = e > 1$ alors $w_n(e) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et d'après la question précédente $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n(e) = e$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$