

## DEVOIR MAISON 4

Deux possibilités pour ce DM :

- Traiter les exercices 1 et 2 (plus faciles).
- Traiter l'exercice 3 (plus difficile).

**Exercice 1** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels positifs ou nuls.

On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ .

1. Montrer que les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes.
2. Justifier que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
3. On définit la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (\ln(k+2) - \ln(k+1)).$$

Montrer que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

**Exercice 2** – Soit  $r > 1$  un réel. On considère les suites  $a$  et  $b$  définies par :

$$a_0 = 1, \quad b_0 = r \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Montrer que les suites  $a$  et  $b$  sont correctement définies et à termes strictement positifs.
2. Établir pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la relation :  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)^2}{2(b_n + a_n)}.$
3. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \leq b_n$ .
4. Étudier la monotonie des suites  $a$  et  $b$ .
5. Démontrer que les suites  $a$  et  $b$  convergent vers deux réels notés  $\ell_a$  et  $\ell_b$ . Pour cela, on pourra s'inspirer de la démonstration de la convergence de deux suites adjacentes.
6. En utilisant la définition de la suite  $b$ , démontrer que  $\ell_a = \ell_b$ . On notera désormais  $\ell$  leur limite commune.
7. Démontrer que la suite  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite constante.
8. En déduire la valeur de  $\ell$ .
9. (a) Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{a_n b_n - a_n^2}{a_n b_n + a_n^2} \leq \frac{r-1}{r+1}.$   
 (b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{(r-1)}{2(r+1)} (b_n - a_n).$
10. On suppose désormais que  $r = 2$ .  
 (a) Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{6^n}.$   
 (b) Déterminer un entier  $n$  tel que  $a_n$  et  $b_n$  constituent un encadrement de  $\sqrt{2}$  d'amplitude au plus  $10^{-12}.$   
 (c) BONUS : Écrire un algorithme permettant de calculer à l'aide des suites  $a$  et  $b$  un encadrement de  $\sqrt{2}$  d'amplitude au plus  $10^{-12}.$

**Exercice 3** – Dans cet exercice, on considère l'ensemble, noté  $\mathcal{S}$ , des suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  à valeurs réelles et telles que

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

pour tout entier  $n \geq 0$ .

Pour tout nombre réel  $x$ , on note  $u(x)$  la suite appartenant à  $\mathcal{S}$  et dont le premier terme vaut  $x$ . On note également  $u_n(x)$  le terme d'indice  $n$  de cette suite. Ainsi,  $u_0(x) = x$  et  $u_1(x) = \exp(x)$ .

1. Démontrer que toute suite appartenant à  $\mathcal{S}$  est strictement positive à partir du rang 1.
2. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite appartenant à  $\mathcal{S}$ . Démontrer que s'il existe un rang  $N \geq 2$  pour lequel  $u_N \leq 1$ , alors  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0.
3. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite appartenant à  $\mathcal{S}$ . Démontrer que si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers  $+\infty$ .

Ci-dessous, on note  $E_0$  l'ensemble des réels  $x$  pour lesquels la suite  $u(x)$  converge vers 0, et  $E_\infty$  l'ensemble des réels  $x$  pour lesquels  $u(x)$  diverge vers  $+\infty$ .

4. Démontrer que  $0 \in E_0$ .
5. (a) Démontrer, pour tout entier  $n \geq 0$ , que la fonction  $x \mapsto u_n(x)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .  
(b) En déduire que, si  $x$  est un élément de  $E_0$ , alors l'intervalle  $] -\infty, x]$  est inclus dans  $E_0$ .
6. (a) Démontrer que la fonction  $x \mapsto \exp(x) - x(x+1)$  est strictement positive sur l'intervalle  $[2, +\infty[$ .  
(b) Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite appartenant à  $\mathcal{S}$ . Démontrer que, s'il existe un rang  $N \geq 1$  pour lequel  $u_N \geq N+1$ , alors  $(u_n)_{n \geq 0}$  diverge vers  $+\infty$ .  
(c) Démontrer que  $1 \in E_\infty$ .
7. Démontrer que, si  $x$  est un élément de  $E_\infty$ , alors l'intervalle  $[x, +\infty[$  est inclus dans  $E_\infty$ .

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un nombre réel  $\delta$  tel que l'intervalle  $] -\infty, \delta[$  est inclus dans  $E_0$  et l'intervalle  $[\delta, +\infty[$  est inclus dans  $E_\infty$ .

8. On définit deux suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  de la façon suivante.  
Tout d'abord, on pose  $a_0 = 0$  et  $b_0 = 1$ .  
Puis, pour tout entier  $n \geq 0$ , on pose  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$  si  $\frac{a_n + b_n}{2} \in E_0$ , et on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  sinon.  
(a) Démontrer que les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  sont convergentes et ont même limite.  
(b) Soit  $\delta$  la limite commune aux suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$ . Démontrer que l'intervalle  $] -\infty, \delta[$  est inclus dans  $E_0$  et l'intervalle  $[\delta, +\infty[$  est inclus dans  $E_\infty$ .
9. On pose  $c_2 = \ln(\ln(2))$ ,  $c_3 = \ln(\ln(2\ln(3)))$  et  $c_4 = \ln(\ln(2\ln(3\ln(4))))$ , et plus généralement, pour tout entier  $\ell \geq 2$ ,  $c_\ell = \ln(\ln(2\ln(3\ln(\cdots \ln((\ell-1)\ln(\ell)) \cdots)))$ .  
Démontrer que, pour tout entier  $\ell \geq 2$ , le nombre réel  $c_\ell$  appartient à  $E_0$ .
10. Démontrer que la suite  $(c_\ell)_{\ell \geq 2}$  converge.
11. Démontrer que  $\delta \in E_\infty$ .