DEVOIR MAISON 3

Exercice 1

On note j le nombre complexe $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. (a) Écrire j sous forme exponentielle, donner le lien entre j^2 et $\overline{j}$, déterminer j^3 et calculer $1+j+j^2$.
   (b) Calculer selon la valeur de l'entier $k \in \mathbb{N}$, la valeur de j^k. On pourra distinguer les cas suivant que k s'écrit $3p$, $3p+1$ ou $3p+2$ où $p \in \mathbb{N}$.
2. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et l'on note

$$S_0 = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 0\ [3]}}^{n} \binom{n}{k}, \qquad S_1 = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1\ [3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 2\ [3]}}^{n} \binom{n}{k}$$

   où, pour tout $a \in \{0,1,2\}$, l'écriture $k \equiv a$ [3] signifie qu'il existe un entier p tel que $k = 3p+a$, ou encore que le reste de la division euclidienne de k par 3 est a.

   (a) Calculer $S_0+S_1+S_2$.
   (b) En utilisant la formule du binôme, exprimer $(1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$ en fonction de S_0, S_1 et S_2.
   (c) Démontrer l'égalité $(1+j)^n+(1+j^2)^n = 2\cos(n\pi/3)$ et calculer de même $(1+j)^n-(1+j^2)^n$.
   (d) À partir du système obtenu à l'aide des questions 2a et 2b, en déduire S_0, S_1 et S_2. Les expressions de S_0, S_1 et S_2 ne devront contenir **aucun** nombre complexe.

Exercice 2

Soit p un nombre réel strictement supérieur à 1. On considère la fonction

$$g_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \arctan(px)-x \end{array}$$

On note α_p le nombre réel $\dfrac{\sqrt{p-1}}{p}$. Les parties du problème ne sont pas indépendantes.

Partie I : Étude de g_p

1. Quelle est la parité de g_p ?
2. Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de g_p.
3. Justifier que g_p est dérivable et calculer $g_p'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Étudier les variations de la fonction g_p sur $\mathbb{R}^+$ et dresser le tableau de variations de g_p sur $\mathbb{R}$. On notera $\beta_p = g(\alpha_p)$.
5. Déduire des variations de g_p le signe de β_p.
6. (a) Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$ le signe de $g_p(x)+x-\dfrac{\pi}{2}$.

   Déterminer la limite en $+\infty$ de $g_p(x)+x-\dfrac{\pi}{2}$ quand x tend vers $+\infty$.

(b) En déduire que la courbe représentative de g_p possède une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on donnera une équation et on précisera si la courbe est au dessus ou en dessous de cette asymptote.

7. Tracer le graphe de g_2 ; on fera apparaître la tangente en O, les tangentes horizontales ainsi que les asymptotes.

   On prendra 2cm pour unité et on utilisera pour le graphe (uniquement) le fait que $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} \approx 0{,}3$

Partie II : Étude d'une réciproque

8. Montrer que la fonction g_p réalise une bijection de $[\alpha_p;+\infty[$ sur un intervalle I_p que l'on précisera.

   On note φ_p la bijection réciproque de $\widetilde{g_p}$: $\begin{array}{ccc} [\alpha_p;+\infty[& \longrightarrow & I_p \\ x & \longmapsto & g_p(x) \end{array}$: autrement dit $\varphi_p = \widetilde{g_p}^{-1}$.

9. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de φ_p ?
   Justifier que 0 appartient au domaine de définition de φ_p.
   Quel est le sens de variation de la fonction φ_p ?
   Que vaut $\varphi_p(\beta_p)$? (où β_p est défini à la question 4 de la partie 1)
   Quelle est la limite de φ_p en $-\infty$?

   On note $\ell_p = \varphi_p(0)$.

10. Que vaut $g_p(\ell_p)$? En déduire que $\ell_p = \arctan(p\ell_p)$.
    Montrer que $g_p\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.
    En déduire que $\ell_p \in \left]\alpha_p; \frac{\pi}{2}\right[$.

11. Montrer que φ_p est dérivable sur un intervalle J_p, que l'on explicitera.

12. Pour tout $y \in J_p$ exprimer $\varphi_p'(y)$ en fonction de $\varphi_p(y)$.

13. Tracer dans le même repère que celui de la question 7 le graphe de φ_2.

La partie III suivante rapportera des points bonus et ne doit être abordée que si tout le reste a été traité.

Partie III : Étude d'une fonction définie implicitement

Dans cette partie, on considère la fonction Λ : $\begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & \ell_p \end{array}$ où ℓ_p désigne le nombre réel défini dans la partie II.

14. Montrer que la fonction Λ est bornée ; préciser un de ses majorants et un de ses minorants.

15. Soit p et q deux nombres réels strictement supérieurs à 1 tels que $p < q$.
    (a) Justifier que $\arctan(p\ell_q) < \arctan(q\ell_q)$.
    (b) En déduire que $g_p(\ell_q) < 0$.
    (c) En déduire que $\ell_p < \ell_q$.
    (d) Quelle est le sens de variation de la fonction Λ ?

16. (a) Montrer que pour tout $p \geqslant \frac{4}{\pi}$, $\arctan\left(\frac{p\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\pi}{4}$.
    (b) En déduire que pour tout $p \geqslant \frac{4}{\pi}$, $\frac{\pi}{4} \leqslant \ell_p \leqslant \frac{\pi}{2}$.
    (c) Déterminer la limite de $\arctan(p\ell_p)$ quand p tend vers $+\infty$.
    (d) En déduire la limite de fonction Λ quand p tend vers $+\infty$.