

DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 – Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on considère la fonction

$$f_\lambda: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+\lambda} \left(\ln(1+e^x) + \lambda \ln(1+e^{-x}) \right) \end{array}$$

et on note Γ_λ sa courbe représentative dans le plan.

On considère également la fonction $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+e^x) - \frac{xe^x}{1+e^x}. \end{array}$

Il est facile de montrer que la fonction g et les fonctions f_λ , pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que la fonction g est paire. Déterminer la limite de g en $-\infty$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g .
2. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, démontrer la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, f_{1/\lambda}(x) = f_\lambda(-x)$.
 (b) Quelle propriété peut-on en déduire pour f_1 ?
 (c) Que pouvez-vous en déduire quant aux courbes Γ_λ et $\Gamma_{1/\lambda}$?
3. Dans cette question, λ désigne un nombre réel strictement supérieur à -1 .
 (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'_\lambda(x) = \frac{e^x - \lambda}{(1+\lambda)(1+e^x)}$.
 (b) Déterminer, en fonction de la valeur de λ , les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f_λ .
 (c) Dresser le tableau de variations de f_λ .
 On distinguera les cas $\lambda \in]-1; 0[, \lambda = 0$ et $\lambda > 0$.
4. On admet que la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ est une asymptote de Γ_1 en $+\infty$ et que Γ_1 est au-dessus de cette asymptote sur $[0, +\infty[$.
 Tracer Γ_1 .
5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on note $M(\lambda)$ l'unique point de Γ_λ où la tangente à Γ_λ est horizontale. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous ces points M_λ lorsque λ parcourt $]0, +\infty[$.
 (a) Donner, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, les coordonnées du point $M(\lambda)$.
 (b) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ est $y = g(x)$, autrement dit, que $\mathcal{E}$ est la courbe représentative de la fonction g .

Exercice 2 – On considère l'application $f: \mathbb{C} \setminus \{i\} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = \frac{1}{\bar{z} + i}$

1. Calculer l'image par f de 2 et de $1+i$, ainsi que leurs antécédents (on donnera tous les résultats sous forme algébrique).
2. (a) Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$, donner une interprétation géométrique.
 (b) Même question pour $f(z) \in i\mathbb{R}$, puis pour $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. (a) Déterminer l'image par f de l'axe imaginaire pur (privé de i).
 (b) i. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \left| f(x) + \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

- ii. Montrer que tout $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $f\left(\frac{\cos(\theta)}{1 - \sin(\theta)}\right) = -\frac{i}{2} + \frac{e^{i\theta}}{2}$.
- iii. En déduire que l'image par f de l'axe réel est le cercle de centre $A\left(-\frac{i}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, privé de l'origine O .
- (c) Soit $z = e^{i\theta}$ (avec $\theta \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$), montrer que $f(z) = -\frac{i}{2} + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$. En déduire l'image par f du cercle trigonométrique privé de i .
4. (a) Déterminer les nombres complexes invariants par f . On notera a celui qui a la plus grande partie imaginaire, et b l'autre.
- (b) Montrer que, si $z \notin i\mathbb{R}$, $\frac{b - f(z)}{a - f(z)} = \frac{b}{a} \times \frac{b + \bar{z}}{a + \bar{z}}$.
- (c) En notant I le point d'affixe i dans le plan complexe, M celui d'affixe z , et M' celui d'affixe $f(z)$, montrer que M' appartient à la demi-droite d'origine O dirigée par le vecteur $\overrightarrow{IM}$.
- (d) (pour les motivés) Donner une interprétation géométrique intelligente de ces deux résultats, et en déduire une façon de construire le point M' à partir du point M .