DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 –

1. Montrer que
$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$
2. En déduire les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
3. Soit θ un réel. Montrer que $\cos(3\theta)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)$.
4. On veut résoudre l'équation du troisième degré :
$$(E) \quad 8x^3-6x-\sqrt{2-\sqrt{2}}=0.$$
On admet qu'une équation de ce type possède au plus 3 solutions réelles.
On va commencer par chercher les solutions sur $[-1,1]$. Soit $x\in[-1,1]$. On note θ le seul réel de $[0,\pi]$ tel que $x=\cos(\theta)$.
   (a) Montrer que x est solution de (E) si et seulement si θ est solution de
   $$\cos(3\theta)=\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right).$$
   (b) Résoudre $\cos(3\theta)=\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ sur $[0,\pi]$.
   (c) Quelles solutions de (E) cela nous fournit-il ? (On exprimera ces solutions sous forme de cosinus)
   (d) Conclure la résolution de l'équation (E).
   (e) $\star$ Exprimer les solutions à l'aide d'expressions faisant intervenir des radicaux, mais pas de cosinus ou de sinus.

Exercice 2 – On désire connaître, si elles existent, toutes les fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall n,m\in\mathbb{N}, \quad f(n+m)=f(n)+f(m). \qquad (*)$$
Pour cela on procède par analyse–synthèse.

1. **Analyse :** On suppose que l'on a trouvé une fonction f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.
   (a) En choisissant judicieusement des valeurs pour n et m dans $(*)$, montrer que $f(0)=0$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=nf(1)$.

   On vient donc de montrer que si une fonction f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ vérifie $(*)$, alors elle s'écrit
   $$f: \begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ n & \longmapsto & an\end{array}$$
   où a est un nombre réel.
2. **Synthèse :** À vous de jouer.
3. **Conclusion :** Donner toutes les solutions du problème.