# DEVOIR MAISON 11

Attention, il y a **3** exercices ! Pensez à retourner la feuille !

## Exercice 1

On considère le polynôme $A = X^2 + X + 1$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Démontrer que $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid AP'' = 2P\} = \mathrm{Vect}(A)$.
2. On définit l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - AP'' \end{array}$.
   (a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Prouver que $\varphi$ est une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel $F$ parallèlement à un sous-espace vectoriel $G$ que l'on déterminera.

## Exercice 2

On considère l'ensemble $E$ des fonctions $f$ définies sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe deux fonctions affines [1] $P$ et $Q$ telles que

$$\forall x \in ]0;+\infty[, \qquad f(x) = P(x) + Q(x)\ln(x).$$

On note $e_1, e_2, e_2$ et $e_4$ les fonctions réelles de $E$ définies sur $]0;+\infty[$ par

$$\forall x \in ]0;+\infty[, \quad e_1(x) = 1, \quad e_2(x) = x, \quad e_3(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad e_4(x) = x\ln(x).$$

On considère l'application $u$ définie sur $E$ à valeurs dans $E$ définie par

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f = P + Q \times \ln & \longmapsto & u(f) = (P - Q) + P' \times \ln \end{array}$$

1. (a) Calculer les dérivées successives jusqu'à l'ordre 3 des fonctions $e_1$, $e_2$, $e_3$ et $e_4$.
   (b) Prouver que la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une famille libre de vecteurs de $E$.
   
   *Indication : on pourra utiliser le calcul précédent et évaluer en 1.*
2. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathcal{F}(]0;+\infty[;\mathbb{R})$, et en déterminer une base. Quelle est la dimension de $E$ ?
3. Montrer que $u$ est un endomorphisme de $E$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$. En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(u)$.
5. Donner un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u)$. En déduire $\mathrm{Ker}(u)$.

1. C'est-à-dire une fonction polynomiale de degré au plus 1.

# Exercice 3

**Partie 1 : un exemple**

On considère l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-2x-3y-3z, 2x+5y+z, 2x+y+5z) \end{array}$$

1. Déterminer une base du noyau de $f$. Quelle est sa dimension ?
2. Quel est le rang de $f$ ?
3. Déterminer une base de l'image de $f$.
4. Déterminer une base du noyau de $f - 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   adaptée à la somme directe $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Sans utiliser de matrices de changement de base, déterminer $M_{\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B}'}(f)$.

**Partie 2 : c'est du propre !**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ un endomorphisme de $E$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note

$$K_\alpha = \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E).$$

Lorsque $K_\alpha$ n'est pas réduit au vecteur nul de $E$, on dit que $\alpha$ est une valeur propre de $f$ et $K_\alpha$ est le sous–espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\alpha$.
On note $n_\alpha$ la dimension de $K_\alpha$.

1. Montrer que $f$ est un automorphisme de $E$ si, et seulement si, 0 n'est pas une valeur propre de $f$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Que vaut $f(x)$ pour tout $x \in K_\alpha$ ?
   (b) Que peut-on dire de $f$ si $K_\alpha = E$ ?
3. Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels distincts. Montrer que $K_\alpha \cap K_\beta = \{0_E\}$.
   Dans toute la suite de cette partie, $\alpha$ et $\beta$ désignent deux nombres réels **distincts** et l'on suppose, de plus, que $n_\alpha + n_\beta = n$.
4. Montrer que $E = K_\alpha \oplus K_\beta$.
5. Soit $\gamma$ un nombre réel distinct de $\alpha$ et $\beta$.
   Montrer que $K_\gamma = \{0_E\}$.