

DEVOIR MAISON 10

Exercice 1

On considère les ensembles $F = \mathbb{R}_0[X]$ et $G = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid \tilde{Q}(1) = 0\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Écrire $X^2 + X + 1$ comme la somme d'un polynôme de F et d'un polynôme de G .

Exercice 3

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants.

1. $F_1 = \{aX^2 + (a+b)X - a + 3b - c \mid (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}$.
2. $F_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z + 4t = 0\}$.

Exercice 3 : Supplémentaires communs en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de même dimension p avec $p < n$, alors F et G admettent un supplémentaire commun, c'est-à-dire qu'il existe H un sous espace vectoriel de E tel que F et H soient supplémentaires dans E et tel que G et H soient supplémentaires dans E .

On procède pour cela par récurrence descendante sur $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on définit la proposition :

H_p : « Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de même dimension p avec $p < n$, alors F et G admettent un supplémentaire commun ».

1. **Préliminaire** : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p < n$.
 - (a) Montrer que si $F = G$, il existe un vecteur $a \in E \setminus (F \cup G)$.
 - (b) Montrer que si $F \neq G$, alors il existe un vecteur $v_F \in F \setminus G$ et un vecteur $v_G \in G \setminus F$.
 - (c) Montrer qu'alors, $v_F + v_G \in E \setminus (F \cup G)$.
 On a donc montré que dans tous les cas, il existe $a \in E \setminus (F \cup G)$.
2. **Cas $p = n-1$** : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$. On note a un vecteur de $E \setminus (F \cup G)$ obtenu à la question précédente et $H = \text{Vect}(a)$.
Démontrer que $F \oplus H = E$ et $G \oplus H = E$.
3. **Cas général** : Soit $p \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ fixé. On suppose que H_{p+1} est vraie.
 - (a) Justifier qu'il existe $a \in E$ tel que F soit en somme directe avec $\text{Vect}(a)$ et G soit aussi en somme directe avec $\text{Vect}(a)$.
 - (b) On note alors $F_1 = F \oplus \text{Vect}(a)$ et $G_1 = G \oplus \text{Vect}(a)$. Justifier qu'il existe H_1 un supplémentaire commun à F_1 et G_1 .
 - (c) On pose $H = \text{Vect}(a) \oplus H_1$. Montrer que H est un supplémentaire commun de F et G .
4. **Conclure**. On précisera bien les étapes du raisonnement.
5. **Exemple** : Dans $\text{Vect}(\mathcal{E})$, on définit :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$$

Déterminer un supplémentaire commun à F et G dans \mathbb{R}^3 .