

COLLES – SEMAINE 7

Exercice 1 (Question de cours) – Énoncé et preuve de la formule du binôme de Newton.

Exercice 2 (Question de cours) – Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

Exercice 3 (Question de cours) – Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que si A possède un plus grand élément alors A possède une borne supérieure et $\max(A) = \sup(A)$.

Exercice 4 (Question de cours) – Montrer que tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 5 – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$.

Exercice 6 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour quelles valeurs de x l'expression $\sum_{k=0}^n \frac{\sin\left((k + \frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est-elle bien définie?
2. Dans ce cas, donner sa valeur en fonction de n .

Exercice 7 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.

Exercice 8 – Calculer $N = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

Exercice 9 – Déterminer une suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n u_k = 3n^2 + 4n$$

Exercice 10 – Démontrer que la suite $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(2 + \sqrt{3})^n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 11 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^k}\right)$.

Exercice 12 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Exercice 13 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{1 \dots 111}_n$.

Exercice 14 – Déterminer si les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants admettent une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum. Le cas échéant donner leur valeur (en justifiant).

1. $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$

2. $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leq x + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{2} \right\},$

3. $C = \left\{ \cos(x) \mid x \in]0; 3\pi[\right\},$

4. $D = \left\{ \frac{4n+5}{2n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$

5. $E = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$

Exercice 15 – Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire un réel $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

On pose $T = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}$.

1. Montrer que T possède une borne inférieure t .
2. Montrer que $f(t)$ minore T .
3. Montrer que $f(T) \subset T$.
4. En déduire que t est un point fixe de f .
5. Le résultat est-il toujours vrai sur $[0, 1[$?

Exercice 16 –

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
 - (a) Justifier pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'existence du réel $d(x, A) = \inf\{|x - a| \mid a \in A\}$, appelé la distance de x à A .
 - (b) Calculer $d(x, A)$ pour tout $x \in A$.
 - (c) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|.$$

2. On pose $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1[$. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto d(x, A)$.

Exercice 17 – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose $f^*(y) = \sup_{x \leq y} f(x)$.

1. Illustrer cette définition de f^* sur différents exemples de fonctions f dessinées à main levée.
2. Déterminer f^* dans le cas où f est croissante.
3. Étudier la monotonie de f^* .