

COLLES – SEMAINE 6

Exercice 1 (Question de cours) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (Question de cours) – Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n. \end{cases}$$

Exercice 3 (Question de cours) – Donner une expression explicite de la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 4 (Question de cours) – Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout nombre complexe a ,

$$1. \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum_{k=0}^n a^k = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Exercice 5 (Question de cours) – Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 6 (Question de cours) – Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer $\sum_{k=0}^n |k - m|$.

Exercice 7 (Question de cours) – Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$.

Exercice 8 – Dans cet exercice, on cherche à déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n.$$

1. Déterminer une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme $v_n = an + b$ avec a et b réel satisfaisant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. On définit la suite $w = u - v$. Montrer que w est une suite récurrente du second ordre à coefficients constants et sans second membre.
3. Donner l'expression du terme général de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .
4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .

Exercice 9 – Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

Étudier les suites $u - v$ et $u + v$. En déduire les expressions de u_n et v_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 – On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{-1}{2}.$$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n .
2. Étudier la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 11 – On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 5, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - (n+1).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = u_n - n - 2$. Montrer que a_n est géométrique.
2. En déduire le terme général de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 12 – Calculer les sommes suivantes, où n est un entier naturel non-nul.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{10} k(10-k), \quad S_2 = \sum_{k=1}^n (n-k+1), \quad S_3 = \sum_{k=0}^n \frac{3^{k+1}}{2^{k-1}}.$$

Exercice 13 – Pour tout $n \geq 2$, on considère le produit $P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

1. Démontrer que $P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^n \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.
2. En déduire une expression simplifiée de P_n .

Exercice 14 – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$.

Exercice 15 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour quelles valeurs de x l'expression $\sum_{k=0}^n \frac{\sin\left((k+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est-elle bien définie?
2. Dans ce cas, donner sa valeur en fonction de n .

Exercice 16 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.

Exercice 17 –

1. Déterminer des réels a et b tels que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}.$$

Exercice 18 – Calculer, pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{\ln^2(k+1)}{\ln(k)\ln(k+1)}\right).$$

Exercice 19 – Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right).$$

Exercice 20 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{j}{n-i}$.