

COLLES – SEMAINE 5

Exercice 1 (Question de cours) – On définit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \longmapsto & \frac{x+1}{x-2} \end{cases}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 2 (Question de cours) – Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 (Question de cours) – Montrer que :

1. Arctan est une fonction impaire.
2. Arctan est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim_{y \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(y) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2}$.
4. Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

Exercice 4 (Question de cours) – Montrer que :

1. Arcsin est une fonction impaire.
2. Arcsin est strictement croissante et continue sur $[-1; 1]$.
3. Arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$ et $\forall y \in] -1; 1[$, $\text{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Exercice 5 (Question de cours) – Montrer que :

1. Arccos est strictement décroissante et continue sur $[-1; 1]$.
2. Arccos est dérivable sur $] -1; 1[$ et $\forall y \in] -1; 1[$, $\text{Arccos}'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Exercice 6 – Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x}$$

1. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.
3. Étudier la fonction f^{-1} sur son ensemble de définition.
4. Donner les équations des asymptotes éventuelles de f et donner l'équation de la tangente à la courbe en 1.

Exercice 7 – Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition et étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. Montrer que f réalise une bijection, en précisant de quel intervalle dans quel autre.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[$.

4. Justifier de l'existence de $g : x \mapsto \ln(f(x))$.
5. Déterminer la dérivée de g .

Exercice 8 – Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice 9 – Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Exercice 10 – Étudier la fonction définie par $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Exercice 11 – On définit la suite de Fibonacci $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad \forall n \geq 2, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^{n+1}$.
2. En calculant leurs tangentes, montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{f_{2n-1}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{f_{2n}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{f_{2n+1}}\right).$$

3. En déduire $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{13}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{21}\right)$.

Exercice 12 – Résoudre $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arccos}(2x)$ d'inconnue réelle x .

Exercice 13 – Soit la fonction f vérifiant $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$.

Étudier et tracer la fonction f .

Exercice 14 – Soit f la fonction vérifiant $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Déterminer son domaine de définition, étudier la fonction et tracer sa courbe.