COLLES – SEMAINE 4

Exercice 1 (Question de cours) – Montrer que pour tout a et b strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ et que $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Exercice 2 (Question de cours) – Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \ln(x) \leqslant x - 1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant x + 1$.

Exercice 3 (Question de cours) – Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x^x$ sur son domaine de définition.

Exercice 4 (Question de cours) – Pour tout $a > 0$ et $b > 0$,

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0$,
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^b |\ln(x)|^a = 0$.

Exercice 5 – Soit $f : x \mapsto x + \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Montrer que les droites $D : y = x + 1$ et $D' : y = x - 1$ sont des asymptotes de la courbe représentative de fonction f.
5. Déterminer les variations de f.
6. Tracer f.

Exercice 6 – Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = \dfrac{x + m}{x^2 + 1}$. On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m.

1. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 0 pour toutes les valeurs de m sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 1 pour toutes les valeurs de m sont concourantes en un même point.

Exercice 7 – On pose a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Étudier $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1 + ax)}{\ln(1 + bx)}$.

Exercice 8 – On étudie la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Déterminer les variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 9 – Déterminer quelles fonctions sont à la fois monotones et périodiques.

Exercice 10 – Étudier et tracer la fonction $f : x \mapsto \sin^5(x) + \cos^5(x)$.

Exercice 11 – Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(y) & = & 4 \\ \mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 12 –

1. Étudier la fonction $u : x \mapsto x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$.
2. Montrer que pour tout $x \in \,]0,1[$, on a

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Exercice 13 –

1. Etudier la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. Soient m et n des entiers strictement positifs. Montrer que

$$n^m = m^n \iff f(n) = f(m).$$

3. Déterminer tous les entiers strictement positifs m et n tels que $n^m = m^n$.

Exercice 14 – Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 15 – Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3^x + 4^x = 5^x$.

Exercice 16 – Soit $y \in [1, +\infty[$. Montrer que l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ d'inconnue x réelle possède deux solutions (si $y > 1$), qui sont opposées l'une de l'autre. Exprimer la solution positive en fonction de y.

Exercice 17 – Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(3-|x|)}$.