

## COLLES – SEMAINE 27

**Exercice 1** (Cours) – Espérance et variance d'une loi uniforme.

**Exercice 2** (Cours) – Espérance et variance d'une loi binomiale.

**Exercice 3** (Cours) – Preuve de l'inégalité de Markov et de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

**Exercice 4** – On lance simultanément deux dés à 6 faces. On appelle  $Z$  la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $Z$ .
2. Calculer l'espérance et la variance de  $Z$ .

**Exercice 5** – On fixe deux entiers naturels  $1 \leq r \leq n$ . Un placard contient  $n$  paires de chaussures. On tire, au hasard,  $2r$  chaussures du placard. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.

Les paires du placard sont numérotées de 1 à  $n$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire valant 1 si les deux chaussures de la  $i$ -ième paire se trouvent parmi les chaussures tirées et 0 sinon.

1. Reconnaître la loi de  $X_i$  et démontrer que  $E(X_i) = \frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$ .
2. Exprimer  $X$  en fonction des  $X_i$  et en déduire  $E(X)$ .

**Exercice 6** – On donne dans le tableau suivant la loi d'une variable aléatoire  $X$  :

$k$	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = k)$	$2a$	$a$	$a$	$3a$	$a$	$2a$

1. Quelle est la valeur de  $a$ ?
2. Calculer  $P(X \leq 0)$  et  $P(|X| \leq 1)$ .
3. Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .
4. Soit  $Y = X + 1$ . Exprimer  $E(Y)$  et  $V(Y)$ .
5. Déterminer la loi de la variable  $Z = |X - 1|$ .
6. Soit  $T$  une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{3}$  telle que  $X$  et  $T$  soient indépendantes.

Déterminer la loi conjointe du couple  $(T, X)$  et  $E(TX)$ .

**Exercice 7** – Une entreprise souhaite recruter un cadre.  $n$  personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est  $p \in ]0, 1[$ . On pose également  $q = 1 - p$ . On définit la variable aléatoire  $X$  par  $X = k$  si le  $k$ -ième candidat qui passe le test est engagé, et  $X = n + 1$  si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. En dérivant la formule donnant  $\sum_{k=0}^n x^k$ , calculer  $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$  pour  $x \neq 1$ .
3. En déduire l'espérance de  $X$ .
4. Quelle est la valeur minimale de  $p$  pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats?

**Exercice 8** – On lance deux dés équilibrés, on note  $U_1$  et  $U_2$  les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle  $X = \min(U_1, U_2)$  et  $Y = \max(U_1, U_2)$ .

1. Donner la loi de  $X$ . En déduire  $E(X)$ .
2. Exprimer  $X + Y$  en fonction de  $U_1$  et  $U_2$ . En déduire  $E(Y)$ .
3. Exprimer  $XY$  en fonction de  $U_1$  et  $U_2$ . En déduire  $\text{Cov}(X, Y)$ .  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 9** – Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ .

1. Déterminer  $P(X = Y)$ .
2. Déterminer  $P(X \geq Y)$ .
3. Déterminer la loi de  $X + Y$ .

**Exercice 10** – Une urne contient  $n \in \mathbb{N}^*$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note  $T$  la variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 2; n+1 \rrbracket$  précisant le nombre de tirages alors effectués.

1. Proposer un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  modélisant cette expérience.
2. Calculer  $P(T = 2)$ .
3. Soit  $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$ . Exprimer  $P(T > k \mid T > k-1)$ .
4. Donner une expression de  $P(T = k)$  pour tout  $k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$

**Exercice 11** – On voudrait connaître le nombre  $n$  de baleines à bosse sur Terre. La première année, on cherche 100 baleines à bosse, on les marque de manière à pouvoir les reconnaître plus tard, puis on les relâche.

L'année suivante, on sélectionne successivement 100 baleines à bosse distinctes. On compte celles qui portent la marque de l'année précédente.

Pour tout  $i \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la  $i$ -ème baleine examinée est marquée et 0 sinon.

On note  $Z = \sum_{i=1}^{100} X_i$ .

Enfin, on appelle  $E$  l'ensemble des baleines,  $B_1, \dots, B_{100}$  les baleines marquées et  $B_{101}, \dots, B_n$  celles qui ne le sont pas.

1. Par quel objet mathématique code-t-on le résultat de l'expérience? Décrire l'univers  $\Omega_n$  et la probabilité  $P_n$  associée à cette expérience. (les indices  $n$  sont-là pour rappeler que tout cela dépend de la population totale de baleines).
2. Soit  $i \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$ . Calculer la probabilité que la  $i$ -ème baleine examinée soit marquée. Quelle est la loi de  $X_1$ ?
3. Calculer  $P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$ . Les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes?
4. Que représente  $Z$ ? Donner  $Z(\Omega_n)$ .
5. Calculer  $E(Z_n)$ .
6. Pour tout  $k \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$ , calculer  $P_n(Z = k)$ .

On traite dans la suite le cas où parmi les baleines bosses examinées la deuxième année, 15 étaient marquées.

1. Quelle est la taille minimale de la population de baleines? On note  $n_0$  cette valeur.
2. Pour tout  $n \geq n_0$ , on note  $a_n = P_n(Z = 12)$ . Déterminer le signe de  $\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$ .
3. En déduire le sens de variation de la suite  $a_n$ .
4. En déduire que cette suite possède un maximum pour un certain indice  $N$  que l'on déterminera.

L'entier  $N$  est appelé estimateur de vraisemblance de la taille de la population de baleines à bosse.