

COLLES – SEMAINE 26

Exercice 1 (Cours) – Montrer que toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 2 (Cours) – Énoncé et preuve du critère du grand O.

Exercice 3 (Cours) – Énoncé et preuve du critère spécial des séries alternées.

Exercice 4 – Étudier la nature des séries suivantes. (On ne demande pas de calculer la somme dans le cas où la série converge.)

$$1. \sum_{n \geq 0} \left(\frac{n}{1+n} \right)^n$$

$$9. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^{-1}}$$

$$2. \sum_{n \geq 1} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$$

$$10. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$$

$$3. \sum_{n \geq 0} \frac{(3n)!}{9(n!)^3}$$

$$11. \sum_{n \geq 1} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$$

$$4. \sum_{n \geq 0} n e^{-\sqrt{n}}$$

$$12. \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$5. \sum_{n \geq 1} \left(1 + (-1)^n \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

$$13. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n + n}$$

$$6. \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} + \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) \right)$$

$$14. \sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$7. \sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n$$

$$15. \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-n}}{4 + \sin(n)}$$

$$8. \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}$$

$$16. \sum_{n \geq 1} \frac{n^7 (\ln n)^n}{n!}$$

Exercice 5 – Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme.

$$\sum_{n=3}^{+\infty} 3^{-n+2} + 2^{-n+3}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (n-2)3^{-n} + (n-2)2^{-n}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 2n}{n!}; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^3 - n^2}$$

Exercice 6 – Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si $a + b = -1$.

2. Déterminer a et b pour que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ soit convergente.

Exercice 7 – Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$1. u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$2. u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$3. u_n = \frac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$$

$$4. u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Exercice 8 – On cherche à étudier la série $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Que dit le cours de la nature de cette série? Nous allons retrouver ce résultat par une méthode directe.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3. A l'aide de ce résultat, retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 9 – On cherche à étudier la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. A l'aide d'un équivalent, montrer que cette série converge.
2. Déterminer a, b, c des réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

3. En déduire la somme de la série.

Exercice 10 – Soit $\alpha \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha}.$$

1. En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent de u_n .
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 11 – On définit la fonction

$$f: \begin{array}{ll} [2, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{array}$$

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 2$,

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_2^n f(x) dx$.

(a) Montrer que I_n tend vers $+\infty$.

(b) On pose $F: \begin{array}{ll} [2, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{array}$.

Montrer que $F' = f$ et en déduire une expression de I_n en fonction de n .

(c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout N entier supérieur ou égal à 2, on pose $S_N = \sum_{n=2}^N \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$.

A l'aide d'une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de S_N .