

COLLES – SEMAINE 25

Exercice 1 (Cours) – Montrer que si f est décroissante, alors pour tout $N \geq n_0$,

$$\int_{n_0}^N f(t) dt + f(N) \leq S_N \leq \int_{n_0}^N f(t) dt + f(n_0).$$

Exercice 2 (Cours) – Énoncé et preuve du critère de comparaison des séries à termes positifs.

Exercice 3 (Cours) – Énoncé et preuve du critère des équivalents pour les séries à termes positifs.

Exercice 4 – Soient α et β deux réels. On définit l'application linéaire

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x + 3y + \alpha z + \beta t, 2x - y + 2z + t, -x + y + 2z) \end{array}.$$

1. Donner A la matrice de φ dans les bases canoniques de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 .
2. Pour quelles valeurs de α et β l'application φ est-elle surjective?

Exercice 5 – On définit deux polynômes $A = X^3 - X^2 - X + 2$ et $B = X^3 - 3X^2 + 2X$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B .

1. Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Trouver trois polynômes P_0, P_1 et P_2 de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que pour tous i et k dans $\llbracket 0, 2 \rrbracket$, on ait $P_i(k) = \delta_{i,k}$.
4. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner, pour un polynôme P quelconque, les composantes de P dans la base (P_0, P_1, P_2) .
5. Factoriser le polynôme B . En déduire la matrice de f dans la base (P_0, P_1, P_2) .

Exercice 6 – Soit E un espace vectoriel et $\beta = (i, j, k)$ une base de E . Soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base β est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une base de $\ker(f - \text{Id}_E)$ et une base de $\ker(f - 2\text{Id}_E)$.
2. Montrer que $E = \ker(f - \text{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\text{Id}_E)$.
3. En déduire une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. (On pourra regarder ce que cela signifie d'appartenir à $\ker(f - \text{Id}_E)$ ou $\ker(f - 2\text{Id}_E)$).
4. Donner une relation matricielle traduisant cela.
5. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 – Dans \mathbb{R}^2 , on pose $F = \text{Vect}((1, 3))$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .
2. On pose s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Représenter graphiquement F, G et les vecteurs $a = (9, -2)$ ainsi que $s(a)$.

3. Donner la matrice de s dans une base \mathcal{B} de votre choix où elle est très simple.
4. Déterminer la matrice de passage de \mathcal{B} à la base canonique de \mathbb{R}^2 , ainsi que son inverse.
5. Déterminer la matrice de s dans la base canonique de \mathbb{R}^2 . En déduire l'expression de $s(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 8 – Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $a = (1, -1, 1)$, $b = (2, -1, 1)$ et $c = (2, -2, 1)$. Montrer que (a, b, c) est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer P la matrice de passage de β à (a, b, c) et calculer P^{-1} .
3. Déterminer R la matrice u dans la base (a, b, c) . Quel est le lien entre A, R, P et P^{-1} ?
4. Calculer R^4 , en déduire les valeurs de A^{4n} pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Que peut-on en déduire sur l'endomorphisme u^2 ?

Exercice 9 – On cherche à étudier la série $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Que dit le cours de la nature de cette série? Nous allons retrouver ce résultat par une méthode directe.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3. A l'aide de ce résultat, retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 10 – On cherche à étudier la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. A l'aide d'un équivalent, montrer que cette série converge.
2. Déterminer a, b, c des réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

3. En déduire la somme de la série.

Exercice 11 – Soit $\alpha \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha}.$$

1. En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent de u_n .
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la série $\sum u_n$.