

COLLES – SEMAINE 24

Exercice 1 (Cours) – Soient E et F des espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $\text{Ker}(f)$ est un sev de E et que

$$f \text{ est injective} \iff \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Exercice 2 (Cours) – Soient E et F des espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $\text{Im}(f)$ est un sev de E .

Exercice 3 (Cours) – Démontrer le résultat suivant :

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

1. Si E est de dimension n , alors E est isomorphe à \mathbb{K}^n .
2. E et F sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension.

Exercice 4 (Cours) – Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation des projecteurs.

Exercice 5 (Cours) – Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation des symétries.

Exercice 6 (Cours) – Démontrer le résultat suivant :

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et H une partie de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E ;
2. H est le supplémentaire d'une droite vectorielle de E .

Exercice 7 – Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image.

1. $f_1 : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$
3. $f_3 : \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$

Exercice 8 – On considère l'application $\phi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ définie par $\phi(P(x)) = xP'(x)$.

1. Vérifier que si $P \in \mathbb{R}_2[x]$ alors $xP'(x) \in \mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$.
3. Calculer $\text{Ker } \phi$.
4. Déterminer une base de $\text{Im } \phi$.

Exercice 9 – On note $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.

1. Montrer que f est un application linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 10 – On note $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AMA$.

1. Montrer que f est un application linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 11 – Démontrer qu'il existe une unique application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 telle que

$$f(1, 0, 0) = (0, 1) \quad f(1, 1, 0) = (1, 0) \quad f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

Donner une expression de f .

Déterminer son noyau et son image. Est-elle injective, surjective, bijective?

Exercice 12 – Soit $F = \text{Vect}(X^2 + 2, 1)$ et $G = \text{Vect}((X + 1)^2)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On pose $A = 2X^2 + 3X + 1$. Quelle est son image par la projection p sur F parallèlement à G ?
3. Donner l'image de A par la symétrie s d'axe F parallèlement à G .

Exercice 13 – on considère \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel. On définit l'application u par :

$$u: z \mapsto iz - i\bar{z}$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.
2. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
3. Calculer u^2 .
4. En déduire que $\text{Id}_{\mathbb{C}} + 2u$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 14 – Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a: \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3 \\ P \mapsto (P(-2), P(2), P(a)) \end{array}$.

1. Déterminer, en discutant selon la valeur de a , le noyau et le rang de f_a .
2. Existe-t-il une solution de degré 2 de l'équation $f_a(P) = (3, 2, 1)$. Dans les cas où elle existe, est-elle unique?

Exercice 15 – Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Montrer que f est une homothétie.

Exercice 16 – Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que

$$fgf = f, \quad gfg = g.$$

1. Montrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E et que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(g)$ sont supplémentaires dans F .
2. Montrer que f , g , fg et gf ont le même rang.

Exercice 17 – Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^2 tel que

$$f((1, 0)) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad f((0, 1)) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

1. Donner une expression de f
2. Déterminer $f \circ f$.
3. Quelle est la nature géométrique de f ? Préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 18 – Soient $P = X^2 + X + 1$ et $Q = 1$ deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

Trouver un endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ dont le noyau est $F = \text{Vect}(P, Q)$.

Exercice 19 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer qu'il existe $g \in \text{GL}(E)$ et p un projecteur tel que $f = g \circ p$.

Exercice 20 – Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $A \neq 0$. On considère $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'application qui à P associe R , reste de la division euclidienne de P par A .

Montrer que f est un projecteur puis déterminer son image et son noyau.

Exercice 21 – Soit u définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $u(P) = P + (1 - X)P'$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
3. Que vaut $\text{rg}(u)$?
4. Déterminer une base de $\text{ker}(u)$.
5. Montrer que $\text{ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 22 – Soient p_1 et p_2 deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie vérifiant :

$$p_1 + p_2 = \text{Id}_E \quad p_1 \circ p_2 = 0 = p_2 \circ p_1.$$

Montrer que p_1 et p_2 sont les projecteurs associés à une décomposition en supplémentaires de E .

Exercice 23 – Dans \mathbb{R}^2 , on pose $F = \text{Vect}((1, 3))$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .
2. On pose s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Représenter graphiquement F , G et les vecteurs $a = (9, -2)$ ainsi que $s(a)$.
3. Donner sans calcul les valeurs de $s(1, 3)$ et $s(-2, 1)$.
4. Trouver l'expression de $s(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 24 – Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère la forme linéaire f_t sur $E = \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f_t(P) = P(t)$.

1. Démontrer que, si a, b, c, d sont des réels distincts, alors (f_a, f_b, f_c, f_d) est une famille libre.
2. On considère a, b des réels distincts, et on pose $\phi(P) = \int_a^b P(x)dx$, qui est une forme linéaire sur E . Démontrer que

$$\phi = \frac{(b-a)}{6} \left(f_a + 4f_{\frac{a+b}{2}} + f_b \right).$$

3. Soit c un réel différent de a, b et $(a+b)/2$. Dédurre des questions précédentes que la famille f_a, f_b, f_c, ϕ est libre.

Exercice 25 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E . Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?