COLLES – SEMAINE 22

Exercice 1 (Cours) – Rappeler les trois propriétés vues en classe sur la norme infinie et les démontrer.

Exercice 2 (Cours) – Donner l'énoncé et la preuve du théorème sur les intégrales nulles des fonctions de signe constant.

Exercice 3 (Cours) – On considère $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{e^t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner l'expression de sa dérivée.

Exercice 4 (Cours) – Énoncé et preuve de la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 5 (Cours) – Énoncé et preuve de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 6 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\,dt \end{array}.$$

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x)$.
3. Déterminer les variations de f_n. En déduire qu'elle admet une limite ℓ_n en $+\infty$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, établir une relation de récurrence entre $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$. (On pourra faire une IPP).
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell_n = n!$.

Exercice 7 – On définit

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt \end{array}.$$

1. Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. A l'aide d'un changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = F(1/x)$
3. En intégrant par parties, exprimer F à l'aide de

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ 0 & \mapsto & 1 \\ x \neq 0 & \mapsto & \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x} \end{array}.$$

4. Déterminer un équivalent de Arctan en 0.
5. En déduire que F peut être prolongée par continuité en 0

Exercice 8 – On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

1. Quelle est la classe de dérivabilité de f ?

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée n-ième de f est
$$f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$
3. A l'aide d'une formule de Taylor, en déduire que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2).$$

Exercice 9 – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f possède une unique primitive F telle que
$$\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 10 – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 11 – Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors il existe $a \in]0,\pi[$ tel que f s'annule en a.
2. En supposant que f ne s'annule pas ailleurs qu'en a sur $]0,\pi[$, donner les quatre tableau de signes possibles de f sur $[0,\pi]$.
3. Montrer que si
$$\int_0^\pi f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = 0 = \int_0^\pi f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t,$$
alors f s'annule au moins deux fois sur $]0,\pi[$.
On pourra raisonner par l'absurde et étudier $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12 – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Déterminer la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 13 – Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
4. Déterminer la limite de I_n, puis à l'aide de la question 2, donner un équivalent de I_n.
5. Soit u une suite réelle définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n.$$
On suppose que $a \neq I_0$.
Montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$ que $|u_n|$ tend vers $+\infty$.

Exercice 14 – Pour tout entier naturel p, on pose $I_p = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(\theta)\big)^p\,\mathrm{d}\theta$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(v)\big)^p\,\mathrm{d}v$.
3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{p+2} = \dfrac{p+1}{p+2}\, I_p$.
4. En déduire la valeur de I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.