

COLLES – SEMAINE 21

Exercice 1 (Cours) – Montrer que pour A et B deux ensembles, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

Exercice 2 (Cours) – Un concours comporte dix questions, numérotées de 1 à 10. On a constaté que, parmi les 145 personnes ayant participé au concours, aucune n'a répondu juste à deux questions consécutives. Peut-on affirmer que deux candidats au moins ont répondu exactement de la même manière au questionnaire, c'est-à-dire juste aux mêmes questions et faux aux mêmes questions?

Exercice 3 (Cours) – Soit A un évènement de probabilité non nulle. Montrer que P_A est une probabilité sur Ω .

Exercice 4 (Cours) – Au cours des 2000 jours de sa vie, un photocopieur du lycée obéit aux règles suivantes : pour tout $n \in \llbracket 1, 2000 \rrbracket$,

- s'il fonctionne à la date $n - 1$, alors il a la probabilité $\frac{3}{5}$ de toujours fonctionner à la date n ;
- s'il est en panne à la date $n - 1$, alors il a la probabilité $\frac{4}{5}$ d'être encore en panne à la date n .

On suppose que le photocopieur est en état de marche à la date 0. Pour tout $n \in \llbracket 0, 2000 \rrbracket$, on note M_n l'évènement «le photocopieur est en état de marche à la date n » et $p_n = P(M_n)$.

1. Soit $n \in \llbracket 0, 1999 \rrbracket$. Démontrer soigneusement que : $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}$.
2. Déterminer le terme général de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5 – Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre du triangle (ABC) selon le protocole suivant :

- Lorsqu'à un instant donné elle se trouve en A , elle se fixe à l'instant suivant en B avec la probabilité 0.75 et en C avec la probabilité 0.25.
- Lorsqu'à un instant donné elle se trouve en B , elle se fixe à l'instant suivant en A avec la probabilité 0.75 et en C avec la probabilité 0.25.
- Lorsqu'à un instant donné elle se trouve en C , elle ira systématiquement en B à l'instant suivant.

On désigne par a_n, b_n, c_n les probabilités respectives à l'instant n que la particule se situe en A, B ou C .

1. Déterminer des relations de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n .
2. En déduire l'existence d'une matrice carré d'ordre 3, notée M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

4. Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}MP$.

5. en déduire l'expression en fonction de n de M^n , puis de a_n, b_n et c_n .
6. Calculer les limites quand n tend vers l'infini des probabilités a_n, b_n, c_n .

Exercice 6 – Lors de sa journée de ski, le prof F. ne pratique que des pistes rouges ou noires. La probabilité qu'il tombe sur une piste rouge est de $\frac{1}{6}$ et sur une piste noire de $\frac{1}{5}$. Au début de la journée, il choisit au hasard la couleur de la piste qu'il descend. S'il ne tombe pas, il descend une piste de la même couleur, sinon, il change de couleur de piste. Au total, il descend M pistes dans la journée. Pour tout $n \in \llbracket 1, M \rrbracket$, on note R_n l'événement "le Prof F emprunte une piste rouge pour la n -ième descente". et $p_n = P(R_n)$.

1. Préciser p_1 .
2. Montrer que $(p_n)_{n \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ est une suite (finie) arithmético-géométrique.
3. Donner alors l'expression de p_n pour tout $n \in \llbracket 1, M \rrbracket$.
4. Calculer la probabilité que le prof F. tombe à la n -ième descente en fonction de n .

Exercice 7 – Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif. L'évènement : « le n -ième sondage est positif » est noté V_n , et on note $p_n = P(V_n)$. L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant est également positif avec une probabilité 0,6 ;
- si un sondage est négatif, le suivant est également négatif avec une probabilité 0,9.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire que : $p_1 = 1$.

1. Calculer $P(V_2)$ et $P(V_3)$.
2. Calculer la probabilité que les trois premiers sondages soient positifs.
3. Pour tout entier naturel n non nul, établir que :

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 1$$

4. On pose $q_n = p_n - 2$. Montrer que (q_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme.
5. Déterminer l'expression de q_n puis de p_n en fonction de n .

Exercice 8 – On tire successivement trois boules (sans remise) dans une urne qui contient 3 boules blanches et 7 boules noires. Pour tout $k \in \{1; 2; 3\}$, on note B_k l'évènement « la k -ième boule tirée est blanche ». Calculer la probabilité pour que les trois boules tirées soient blanches.

Exercice 9 – Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Soient A_1, \dots, A_n des événements ($n \in \mathbb{N}^*$). Démontrer que

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \left(\sum_{i=1}^n P(A_i) \right) - (n-1).$$

Exercice 10 – Chaque jour du lundi au vendredi, M. F a la probabilité $p \in]0, 1[$ d'oublier ses notes de cours en classe. Peu lui importe car il improvise à chaque cours, mais ce vendredi soir il ne les retrouve plus et ça le contrarie. Il est cependant certain de les avoir eu en sa possession lundi matin.

1. Quelle est probabilité que le professeur M. F ait perdu ses notes de cours dans la journée de Lundi? de Mardi?
2. Quel est le jour le plus probable où eu lieu cette perte?