COLLES – SEMAINE 2

Exercice 1 (Question de cours) – Résoudre l'équation $\tan(2x) = 3\tan(x)$.

Exercice 2 (Question de cours) – Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 3 (Question de cours) – Résoudre l'équation $Z^2 = -3 + 4i$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4 (Question de cours) – Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5 (Question de cours) – Soient θ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Montrer les propriétés suivantes sur l'exponentielle complexe :

$$\mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)} = \mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{i\varphi}, \quad \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta}, \quad \mathrm{e}^{i\theta} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}\theta = 2k\pi$$

Exercice 6 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Exercice 7 – Résoudre dans $[0;4\pi]$ l'équation $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 8 – Résoudre dans $[\pi;3\pi]$ l'inéquation $\sin(3x + 7\pi) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 9 – Résoudre dans $[\pi;3\pi]$ l'équation $\tan\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 10 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(x)^2 - 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)^2 = 0$$

Exercice 11 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2\cos(x)^2 + 9\cos(x) + 4 = 0$$

Exercice 12 – Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $z + 2i = iz - 1$
2. $(3 + 2i)(z - 1) = i$
3. $(2 - i)z + 1 = (3 + 2i)z - i$
4. $(4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z$.

On écrira les solutions sous forme algébrique.

Exercice 13 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$$

Exercice 14 – On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure ai avec $a \in \mathbb{R}$ à l'équation.
2. Déterminer $b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z - ai)\left(z^2 + bz + c\right)$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Sur le même modèle, résoudre l'équation $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$.

Exercice 15 – A tout nombre complexe z différent de $1+i$, on associe le nombre $y_z = \dfrac{z-3i}{z-(1+i)}$.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que y_z soit imaginaire pur.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que y_z soit réel strictement négatif.
3. Les représenter dans le plan complexe.

Exercice 16 – Donner l'écriture sous forme exponentielle de

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}$$