# COLLES – SEMAINE 17

**Exercice 1** (Question de cours) – Démontrer le résultat suivant : Soit $R = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $Q \in \mathbb{K}(X)$ pour lesquels : $R = E + Q$ et $\deg(Q) < 0$. Le polynôme $E$ est appelé la partie entière de $R$ et n'est autre que le quotient de la division euclidienne de $A$ par $B$.

**Exercice 2** (Question de cours) – Démontrer le résultat suivant : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\dfrac{1}{X^n - 1} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \dfrac{\omega}{X - \omega}$.

**Exercice 3** (Question de cours) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{X^{2n} - 1}$ a pour décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ :

$$\frac{1}{X^{2n}-1} = \frac{1}{2n(X-1)} - \frac{1}{2n(X+1)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X\cos\frac{k\pi}{n} - 1}{X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1}.$$

**Exercice 4** (Question de cours) – Développement asymptotique de la série harmonique : énoncé et démonstration.

**Exercice 5** (Question de cours) – Démontrer le résultat suivant : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Alors, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

**Exercice 6** – Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$f : x \mapsto \frac{-12x}{x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36}.$$

En déduire une primitive de $f$ sur $]0,1[$.

**Exercice 7** – Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X^4+1}{(X+1)^2\left(X^2+1\right)}$$

**Exercice 8** – Soit $f(x) = \dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in \left]1, +\infty\right[$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$\frac{5X^2+21X+22}{(X-1)(X+3)^2}$$
en éléments simples.
2. En déduire la primitive de $f$ sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2 .

**Exercice 9 –** Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes ?

1. $n \sim_{+\infty} n+1$
2. $n^2 \sim_{+\infty} n^2+n$
3. $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln\left(10^6 n\right)$
4. $\exp(n) \sim_{+\infty} \exp\left(n+10^{-6}\right)$
5. $\exp(n) \sim_{+\infty} \exp(2n)$
6. $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n+1)$.

**Exercice 10 –** Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
2. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $w_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$
4. $z_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

**Exercice 11 –** Déterminer un équivalent le plus simple possible des fonctions suivantes :

1. $x+1+\ln x$ en 0 et en $+\infty$
2. $\cos(\sin x)$ en 0
3. $\left(1-x^2\right)$ en 1
4. $\ln(x)$ en 1
5. $\cosh(\sqrt{x})$ en $+\infty$
6. $\dfrac{\sin x \ln\left(1+x^2\right)}{x \tan x}$ en 0
7. $\ln(\sin x)$ en 0
8. $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ en 0 en en $+\infty$

**Exercice 12 –**

1. Démontrer que
$$\ln(1+x)+x^2 \sim_0 x \text{ et } x^2+x^3 \sim_0 x^2.$$
En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)+x^2}{x^2+x^3}$.
2. Démontrer que
$$\sin(2x) \sim_0 2x \text{ et } \tan(3x) \sim_0 3x.$$
En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}$.

**Exercice 13 –** En utilisant (éventuellement) des équivalents, déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln\left(\sin^2 x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\arctan x}{x\tan x}$

**Exercice 14 –** Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k! \sim_{+\infty} n!.$$