

COLLES – SEMAINE 16

Exercice 1 (Question de cours) – Démontrer le résultat suivant : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est une racine de P ssi le polynôme $X - \alpha$ divise P

Exercice 2 (Question de cours) – Démontrer le résultat suivant : Le polynôme non constant $X^3 - 2X + 5$ est scindé sur \mathbb{C} d'après le théorème de d'Alembert-Gauss - mais pas forcément sur \mathbb{R} - et nous pouvons noter x, y et z ses trois racines complexes comptées avec multiplicité. L'unique polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont x^2, y^2 et z^2 est alors le polynôme $X^3 - 4X^2 + 4X - 25$.

Exercice 3 (Question de cours) – Démontrer le résultat suivant : Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ DISTINCTS et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ quelconques. Le polynôme $\sum_{i=1}^n y_i L_i$ est alors le seul et unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À $n - 1$ pour lequel $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 4 (Question de cours) – Démontrer le résultat suivant : Les polynômes P pour lesquels $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont exactement tous les polynômes de la forme $Y + Q \prod_{k=1}^n (X - x_k)$, Q décrivant $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 5 – Soient a et b des réels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Exercice 6 – Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que

$$P(0) = P(1) = P'(1) = 0, \quad P'(0) = 2.$$

Exercice 7 – Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

Exercice 8 – Calculer, pour $n \geq 2$ les restes de la division euclidienne de $(X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ par

- $(X - 2)(X - 3)$.
- $(X - 2)^2$.

Exercice 9 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche tous les polynômes non-nuls vérifiant la relation

$$(X + 1)^n P(X) = X^n P(X + 1).$$

1. On suppose que l'on a trouvé un polynôme non-nul vérifiant cette relation.

(a) Montrer que 0 est une racine de P .

(b) Soit a une racine complexe non-nulle de P . Montrer que $a + 1$ et $a - 1$ sont des racines de P . Aboutir à une contradiction.

(c) En déduire la forme des polynômes solutions.

2. Conclure.

Exercice 10 – Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0.$$

1. Montrer que si a est racine de P alors a^2 l'est aussi
2. En déduire que $a = 0$ ou bien a est racine de l'unité.

Exercice 11 (Polynômes de Laguerre) – Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit $L_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

Observer que L_n est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

Exercice 12 – On appelle polynôme réciproque un polynôme dont la suite des coefficients est symétrique. Autrement dit, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ est réciproque si et seulement si $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = a_{n-k}$.

1. Démontrer qu'un polynôme de degré n est réciproque si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Démontrer que le produit de deux polynômes réciproques est un polynôme réciproque.
3. On suppose que $P = (1 + X)Q$.
 - (a) Démontrer que si P est un polynôme réciproque alors Q l'est aussi.
 - (b) Démontrer qu'un polynôme réciproque de degré impair admet -1 comme racine.
 - (c) Montrer que si α est racine d'un polynôme réciproque, alors $\alpha \neq 0$ et $\frac{1}{\alpha}$ est racine de P .