

COLLES – SEMAINE 15

Exercice 1 (Question de cours) – Preuve du théorème d’Euclide (infinité des nombres premiers).

Exercice 2 (Question de cours) – Démontrer que $a \wedge b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{v_p(a), v_p(b)\}}$.

Exercice 3 (Question de cours) – Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ (formule de Vandermonde).

Exercice 4 (Question de cours) – Montrer que pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(X^n)^{(\ell)} = \frac{n!}{(n-\ell)!} X^{n-\ell}$.

Exercice 5 (Question de cours) – Énoncé et preuve de la formule de Taylor.

Exercice 6 – Déterminer le pgcd et les coefficients de l’égalité de Bézout des entiers a et b suivants :

1. $a = 33$ et $b = 24$
2. $a = 37$ et $b = 27$
3. $a = 270$ et $b = 105$

Exercice 7 –

1. Déterminer, suivant les puissances de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 1357^{2013} par 5.

Exercice 8 – Démontrer que 13 divise $3^{126} + 5^{126}$.

Exercice 9 – Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. En déduire que

$$n+1 \mid \binom{2n}{n}$$

Exercice 10 – Soient a et b deux entiers premiers entre eux, non nuls. Notre but est de déterminer tous les couples $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$.

1. Justifier l’existence d’au moins un couple solution $(u_0; v_0)$.
2. Montrer que tout autre solution est de la forme $(u_0 + kb; v_0 - ka)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Conclure.

Exercice 11 – Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff \exists m \in \mathbb{N}, n = m^2$$

En déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 12 – Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l’équation $P'^2 = 4P$.

Exercice 13 – Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l’équation $P \circ P = P$.

Exercice 14 – Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 15 – Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Exercice 16 – Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.

Exercice 17 – Montrer les divisibilités suivantes et déterminer les quotients correspondant :

1. $X - 1 \mid X^3 - 2X^2 + 3X - 2$
2. $X - 2 \mid X^3 - 3X^2 + 3X - 2$
3. $X + 1 \mid X^3 + 3X^2 - 2$.

Exercice 18 (Polynômes de Tchebychev (1821 – 1894)) –

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

1. Calculer f_0, f_1, f_2 et f_3 .
2. Exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.
3. Établir qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1; 1]$.
4. Donner le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.
5. Observer que T_n possède exactement n racines distinctes, que l'on exprimera, toutes dans $] - 1; 1[$.

Exercice 19 (Polynômes d'interpolation de Lagrange (1736-1813)) –

Soit (a_0, a_1, \dots, a_n) une famille d'éléments de \mathbb{K} deux à deux distincts. Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ on pose

$$L_i = \frac{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (a_i - a_j)}.$$

1. Observer que, pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ (où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (1823-1891) qui est égal à 1 lorsque $i = j$ et 0 sinon).
2. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P(X) = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i(X)$$

Exercice 20 (Polynômes de Laguerre) – Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit $L_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

Observer que L_n est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

Exercice 21 – On appelle polynôme réciproque un polynôme dont la suite des coefficients est symétrique. Autrement dit, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ est réciproque si et seulement si $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = a_{n-k}$.

1. Démontrer qu'un polynôme de degré n est réciproque si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Démontrer que le produit de deux polynômes réciproques est un polynôme réciproque.
3. On suppose que $P = (1 + X)Q$.
 - (a) Démontrer que si P est un polynôme réciproque alors Q l'est aussi.
 - (b) Démontrer qu'un polynôme réciproque de degré impair admet -1 comme racine.
 - (c) Montrer que si α est racine d'un polynôme réciproque, alors $\alpha \neq 0$ et $\frac{1}{\alpha}$ est racine de P .