

COLLES – SEMAINE 14

Exercice 1 (Question de cours) – Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (Question de cours) – Énoncer et démontrer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3 (Question de cours) – Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ trois entiers solutions de l'équation de Fermat $x^3 + y^3 = z^3$. Montrer que l'un des entiers x, y ou z est divisible par 3.

Exercice 4 (Question de cours) – Calculer le reste de la division euclidienne de 2^{65362} par 7.

Exercice 5 – On considère les matrices

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et on pose $A = \Delta + N$.

1. Calculer N^k pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
2. (a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1} .
 (b) Montrer que $D = P^{-1}\Delta P$ est une matrice diagonale.
 (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter Δ^n .
3. Donner une expression de A^n pour tout $n \geq 1$.
4. On considère les suites définies par $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= z_n \end{cases}$$

- (a) Exprimer $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$ comme un produit matriciel.
- (b) En déduire une expression des termes généraux des trois suites.

Exercice 6 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$.
3. Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire A^n en fonction de n .

Exercice 7 – On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $AX - XA = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8 – Pour $a \in \mathbb{R}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle inversible? Si oui, donner son inverse.

Exercice 9 – Soient a et b des réels. On pose

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $M(a, b)^2$. L'écrire comme une combinaison linéaire des matrices $M(a, b)$ et I_3 .
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $M(a, b)$ soit inversible. Dans ce cas, calculer son inverse.

Exercice 10 – On définit l'ensemble de matrices suivant :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que $I_3 \in G$.
2. Montrer que $G \subset GL_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si A et B sont dans G , alors $A \times B$ aussi.
4. Montrer que si $A \in G$, alors $A^{-1} \in G$.
5. Qu'a-t-on démontré?

Exercice 11 – Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I_2$.
Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = B$.

Exercice 12 – On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A - I_3$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n .

Exercice 13 – On définit trois suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$a_0 = 1, b_0 = 2, c_0 = 7, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n , b_n et c_n en fonction de n .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Trouver une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

3. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

5. En déduire les expressions a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Exercice 14 –

1. On note, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$M(a, t) = \begin{pmatrix} a \operatorname{ch}(t) & -a \operatorname{sh}(t) \\ -a \operatorname{sh}(t) & a \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix},$$

$$G = \{M(a, t) \mid a \in \mathbb{R}_+^*, t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $G \subset \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $I_2 \in G$.
3. Montrer que si A et B sont dans G , alors $A \times B$ aussi.
4. Montrer que si $A \in G$, alors $A^{-1} \in G$.
5. Qu'a-t-on démontré?

Exercice 15 – Soit x un nombre réel et $N(x)$ la matrice définie par

$$N(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a $N(x)^k = N(kx)$.
2. Soit $n \geq 1$. Déterminer les réels x pour lesquels $N(x)^n = N(x)^T$.

Exercice 16 – On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels x et y tels que $A^2 + xA + yI_2 = 0_2$.
2. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites (α_n) et (β_n) de nombres réels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2.$$

On donnera la relation qui permet de calculer α_{n+1} et β_{n+1} à partir de α_n et β_n .

3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} + \alpha_{n+1} - 2\alpha_n = 0$ et en déduire l'expression de α_n en fonction de n uniquement.
4. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA . Calculer A^n et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire $(\lambda A + \mu B)^n$ pour tout $(\lambda, \mu, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$.

2. Exprimer $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de A et B puis calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 – Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & x & x^2 \\ 1/x & 0 & x \\ 1/x^2 & 1/x & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que $(A - \lambda I_3)(A - \mu I_3) = 0$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe α_n et β_n entiers tels que

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3.$$

4. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \alpha_n - \beta_n, \quad v_n = 2\alpha_n + \beta_n.$$

Montrer que ces deux suites sont géométriques. En déduire les termes généraux de u et v .

5. Expliciter les termes généraux des suites α et β et en déduire la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19 – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et on définit la matrice

$$A = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On note $\bar{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A .
Calculer $A\bar{A}$ et conclure sur l'inversibilité de A .