

## COLLES – SEMAINE 13

**Exercice 1** (Question de cours) – Preuve du théorème de la limite de la dérivée.

**Exercice 2** (Question de cours) – Preuve de l'inégalité de Jensen.

**Exercice 3** (Question de cours) – Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x_1, \dots, x_n > 0$ , on a :

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

**Exercice 4** – On considère la fonction  $f$  définie pour  $x \geq 0$  par :  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ . On considère aussi la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que l'équation  $x^2 + x - 1 = 0$  a une seule solution dans l'intervalle  $]0, 1[$ , que l'on notera  $r_2$ . Préciser la valeur de  $r_2$ .
2. Montrer que si  $x$  est un réel de l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , alors  $f(x)$  appartient aussi à l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .
3. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .
4. Démontrer que :  $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$ .
5. Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2|$ .
6. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$ .
7. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et donner sa limite.

**Exercice 5** – On considère  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$$

1. Dresser le tableau de variations complet de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ . On notera  $\alpha$  cette solution et on montrera plus précisément que  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .
3. Montrer que l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  est stable par  $f$ .
4. Montrer que pour tout  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation valable pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

5. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

6. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

puis en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

7. En déduire que  $(u_n)$  converge et donner sa limite.

**Exercice 6** – Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On suppose que  $f'$  ne s'annule pas. Montrer que  $f$  ne peut être périodique.

**Exercice 7** – Soit  $a > 0$  et  $f : [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f(a) = 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

1. Montrer que la dérivée de  $x \mapsto f(x)/x$  s'annule sur  $]0; a[$ .
2. En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à  $f$  passe par l'origine.

**Exercice 8** – Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Montrer que  $f$  est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée est bornée.

**Exercice 9** – En utilisant l'égalité des accroissements finis, déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right)$$

**Exercice 10** –

1. Montrer que  $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$  est concave sur  $]1, +\infty[$ .
2. En déduire que  $\forall a, b > 1, \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \cdot \ln b}$ .

**Exercice 11** – Soit  $n \geq 2$ .

1. Étudier la convexité de la fonction  $f$  définie sur  $[-1; +\infty[$  par  $f(x) = (1+x)^n$ .
2. En déduire que, pour tout  $x \geq -1, (1+x)^n \geq 1+nx$ .

**Exercice 12** –

1. Étudier la convexité/concavité de  $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. En déduire que pour tous  $x_1, \dots, x_n \geq 1$ , on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}$$