

COLLES – SEMAINE 12

Exercice 1 (Question de cours) – Unicité de la limite d'une fonction f en un point $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (Question de cours) – Théorème de la limite monotone : montrer que si f est une fonction croissante et majorée, définie sur un intervalle $]a, b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b .

Exercice 3 (Question de cours) – Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

Exercice 4 (Question de cours) – Énoncer et démontrer les formules de dérivation du produit et du quotient de fonctions dérivables en un point $a \in I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (Question de cours) – Montrer que si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

Exercice 6 (Question de cours) – Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Exercice 7 (Question de cours) – Énoncer et démontrer l'égalité des accroissements finis.

Exercice 8 – Déterminer les limites suivantes :

$$\frac{\operatorname{sh}(x)}{x} \text{ quand } x \rightarrow 0, \quad \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} \text{ quand } x \rightarrow 0.$$

Exercice 9 – Déterminer les limites suivantes :

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \text{ quand } x \rightarrow +\infty, \quad \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \text{ quand } x \rightarrow +\infty \text{ et quand } x \rightarrow -\infty$$

Exercice 10 – Étudier les limites suivantes :

$$\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)} \text{ quand } x \rightarrow 1, \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right)e^{\cos(x)} \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

Exercice 11 – On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{si } x \notin \{-1, 0, 1\} \\ 0 & \text{si } x = -1, 0, 1 \end{cases}$$

En quels points g est-elle continue?

Exercice 12 – Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 13 – Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 14 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}$$

Démontrer qu'on peut prolonger f par continuité en -1 . Préciser la valeur prise en -1 par ce prolongement.

Exercice 15 – Soit I un intervalle, $k > 0$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Démontrer que f est continue sur I .

Exercice 16 – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point.

Exercice 17 – Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor^2 + (2\lfloor x \rfloor + 1)(x - \lfloor x \rfloor) \end{matrix}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que le graphe de f est une ligne polygonale inscrite dans une parabole et le tracer.

Exercice 18 – Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 19 – On pose $h : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2 + 1)e^{3x} \end{matrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que h est dérivable n -fois et calculer sa dérivée n -ième.

Exercice 20 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Calculer de deux façons différentes la dérivée n -ième de $x \mapsto x^{2n}$. En déduire une expression de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 21 – Soit P une fonction polynomiale.

Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions sur $\mathbb{R}$.