

COLLES – SEMAINE 1

Exercice 1 (Question de cours) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer par une récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$.

Exercice 2 (Question de cours) – Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 3 (Question de cours) – Montrer que $\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-\infty, k] = \mathbb{R}$.

Exercice 4 (Question de cours) – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Exercice 5 (Question de cours) – Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire généralisée.

Exercice 6 (Question de cours) – Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 7 – Résoudre l'équation $|x - 4| = 2x + 10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 – Résoudre l'équation (E) : $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} = -3$.

Exercice 9 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{x^2 + 1} = 2x + 1$.

Exercice 10 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$.

Exercice 11 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x - 1 = \sqrt{x^2 + x + 13}$.

Exercice 12 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $9 - x = \sqrt{3 + x}$.

Exercice 13 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x - 4| = |x - 1|$ puis l'inéquation $|2x - 4| \geq |x - 1|$.

Exercice 14 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$|x| + |x + 1| + |x + 2| = 3.$$

Exercice 15 – Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$|x + 12| = |x^2 - 8|, \quad |x + 12| \leq |x^2 - 8|$$

Exercice 16 – Soient a et b deux réels.

1. Montrer que

$$a + b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a \notin \mathbb{Q} \text{ Ou } b \notin \mathbb{Q}.$$

2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie quels que soient a et b ?

Exercice 17 – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}.$$

Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n = 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$.

Exercice 18 – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 6 - 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Exercice 19 – Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 20 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par

$$u_0 = 2; \quad u_1 = 3; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Calculer quelques termes de cette suite, émettre une conjecture sur le terme général de cette suite.
2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 21 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par

$$u_0 = 0; \quad u_1 = 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} + 1.$$

Montrer que cette suite est strictement croissante

Exercice 22 – Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 23 – L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1+x.$$

1. Soit f une fonction vérifiant (E). Que vaut $f(0)$? $f(1)$?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant (E) en $1-x$, déterminer $f(x)$.
3. Conclure.