

Approximation de la limite de suites adjacentes

▷ Rappeler la définition de suites adjacentes.

Rappelons que, d'après le théorème sur les suites adjacentes, elles convergent vers une **limite commune** ℓ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Ainsi, en calculant u_n et v_n pour n assez grand, on obtient un encadrement de ℓ avec une bonne précision.
C'est l'objet de ce TP : approcher la limite de suites adjacentes données.

1 Un premier exemple

Considérons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

On admet que ces deux suites sont adjacentes et convergent donc vers une même limite ℓ .

La fonction suivante permet de calculer une approximation de ℓ à ε près, où ε est l'argument d'entrée de la fonction.

```
1 def approximation (eps):  
2     u=1  
3     v=2  
4     n=1  
5     while np.abs(v-u) >eps :  
6         n=n+1  
7         u=u+1/n**2  
8         v=u+1/n  
9     return u, v
```

▷ Que fait-on aux lignes 2 et 3 ?

▷ A quoi correspond la quantité `np.abs(v-u)` ?

▷ Expliciter avec des mots la condition de la ligne 5.

▷ Que fait-on aux lignes 7 et 8 ?

▷ Tester votre programme pour $\epsilon = 10^{-3}$. Qu'obtenez-vous ?

▷ En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

▷ Tester votre programme pour $\epsilon = 10^{-6}$. Qu'obtenez-vous ?

▷ En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.

Remarques

1. On peut démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.
2. Pour $\epsilon = 10^{-3}$, Python donne le résultat instantanément. En revanche, il faut attendre 2,3 secondes pour obtenir le résultat pour $\epsilon = 10^{-6}$. Cela s'explique par la vitesse de convergence très lente de (u_n) et (v_n) . Il faut en effet 1000 itérations pour obtenir ℓ avec une précision 10^{-3} et 1000000 itérations pour obtenir ℓ avec une précision 10^{-6} ..
On reviendra sur cette notion de vitesse de convergence dans un prochain TP.

2 A vous de jouer

Exercice 2.1 On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{4n-1}.$$

1. **A la main** Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et convergent vers une même limite.
2. **En Python** Ecrire une fonction qui, étant donné un entier naturel n , calcule u_n et v_n .
3. **En Python** Ecrire une fonction qui, étant donné $\epsilon > 0$, permet de calculer une approximation de la limite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à ϵ près.

Exercice 2.2 On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

On admet que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers une limite commune ℓ .

1. **En Python** Ecrire une fonction qui, étant donné un entier naturel n , calcule a_n et b_n .
2. **En Python** Ecrire une fonction qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de la limite commune des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2.3 On considère les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$v_0 = 1, \quad w_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}w_n.$$

1. **En Python** Ecrire un programme qui, étant donné un entier naturel n , calcule v_n et w_n .
2. On pose $t_n = v_n - w_n$.
 - (a) **A la main** Montrer que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - (b) **A la main** Exprimer t_n en fonction de n .
 - (c) **A la main** En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \leq w_n$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - w_n)$.
3. (a) **A la main** Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
(b) **A la main** Montrer que les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée ℓ .
4. (a) **En Python** Ecrire une fonction qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de ℓ à ε près.
(b) Vers quelle limite semblent converger $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
5. On pose $s_n = v_n + w_n$.
 - (a) **A la main** Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
 - (b) **A la main** En déduire la valeur de ℓ .