Approximation de la limite de suites adjacentes

▷ Rappeler la définition de suites adjacentes.

Rappelons que, d'après le théorème sur les suites adjacentes, elles convergent vers une **limite commune** ℓ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Ainsi, en calculant u_n et v_n pour n assez grand, on obtient un encadrement de ℓ avec une bonne précision.
C'est l'objet de ce TP : approcher la limite de suites adjacentes données.

1 Un premier exemple

Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

On admet que ces deux suites sont adjacentes et convergent donc vers une même limite ℓ.

La fonction suivante permet de calculer une approximation de ℓ à ε près, où ε est l'argument d'entrée de la fonction.

```
1 def approximation (eps):
2   u=1
3   v=2
4   n=1
5   while np.abs(v-u) >eps :
6     n=n+1
7     u=u+1/n**2
8     v=u+1/n
9   return u,v
```

▷ Que fait-on aux lignes 2 et 3 ?

▷ A quoi correspond la quantité `np.abs(v-u)` ?

▷ Expliciter avec des mots la condition de la ligne 5.

▷ Que fait-on aux lignes 7 et 8 ?

▷ Tester votre programme pour $\epsilon = 10^{-3}$. Qu'obtenez-vous ?

▷ En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

▷ Tester votre programme pour $\epsilon = 10^{-6}$. Qu'obtenez-vous ?

▷ En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.

Remarques

1. On peut démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ell = \dfrac{\pi^2}{6}$.
2. Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, Python donne le résultat instantanément. En revanche, il faut attendre 2,3 secondes pour obtenir le résultat pour $\varepsilon = 10^{-6}$. Cela s'explique par la vitesse de convergence très lente de (u_n) et (v_n). Il faut en effet 1000 itérations pour obtenir ℓ avec une précision 10^{-3} et 1000000 itérations pour obtenir ℓ avec une précision 10^{-6}..
On reviendra sur cette notion de vitesse de convergence dans un prochain TP.

2 A vous de jouer

Exercice 2.1 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{4n-1}.$$

1. **A la main** Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et convergent vers une même limite.
2. **En Python** Ecrire une fonction qui, étant donné un entier naturel n, calcule u_n et v_n.
3. **En Python** Ecrire une fonction qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à ε près.

Exercice 2.2 On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

On admet que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers une limite commune ℓ.

1. **En Python** Ecrire une fonction qui, étant donné un entier naturel n, calcule a_n et b_n.
2. **En Python** Ecrire une fonction qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de la limite commune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.3 On considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$v_0 = 1, \quad w_0 = 2 \quad \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}w_n \quad \text{ et } w_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}w_n.$$

1. **En Python** Ecrire un programme qui, étant donné un entier naturel n, calcule v_n et w_n.
2. On poste $t_n = v_n - w_n$.
   (a) **A la main** Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) **A la main** Exprimer t_n en fonction de n.
   (c) **A la main** En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant w_n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - w_n)$.
3. (a) **A la main** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) **A la main** Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée ℓ.
4. (a) **En Python** Ecrire une fonction qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de ℓ à ε près.
   (b) Vers quelle limite semblent converger $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. On pose $s_n = v_n + w_n$.
   (a) **A la main** Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (b) **A la main** En déduire la valeur de ℓ.

