Résolution approchée d'équations $f(x) = 0$

Considérons une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue et supposons que f s'annule en une seule et unique valeur $\alpha \in]a;b[$ et change de signe. On ne peut pas forcément calculer explicitement α et on doit parfois utiliser des méthodes de calcul approché pour avoir une bonne estimation de la valeur de α.
Nous présentons ici deux méthodes numériques, la méthode de la dichotomie et la méthode de Newton, qui permettent d'obtenir une valeur approchée de α.

1 Méthode de la dichotomie

1.1 Le principe

La première méthode est basée sur le principe de dichotomie. Comme f s'annule et change de signe, on a en particulier $f(a)f(b) < 0$.

Le principe. On considère $m = \dfrac{a+b}{2}$ le milieu du segment $[a;b]$. Alors deux cas sont possibles :

- soit $f(a)f(m) \leq 0$: alors $f(a)$ et $f(m)$ sont de signe opposé. Comme f est continue, f doit s'annuler sur $[a;m]$ et donc $\alpha \in [a;m]$.
- soit $f(m)f(b) \leq 0$: alors $f(m)$ et $f(b)$ sont de signe opposé et de la même façon $\alpha \in [m;b]$.

On recommence alors le raisonnement précédent avec l'intervalle obtenu contenant α.

On construit une suite d'intervalles $[a_n;b_n]$ contenant α.
Pour cela, on définit trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et

- si $f(a_n)f(m_{n+1}) \leq 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ **et** $b_{n+1} = m_{n+1}$.
- si $f(m_{n+1})f(b_n) \leq 0$ alors $a_{n+1} = m_{n+1}$ **et** $b_{n+1} = b_n$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème (Méthode de la dichotomie)
Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et elles convergent vers α l'unique solution de $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a;b]$.

1.2 A vous de jouer

Exercice 1.1 On considère la fonction $f : x \in [1;4] \mapsto x^2 - 2$.

1. Tracer la fonction f sur l'intervalle $[1;4]$ avec Python.
   On constate que f s'annule et change de signe sur l'intervalle $[1;4]$.
2. Résoudre, à la main, l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [1;4]$.
3. Calculer dans ce cas a_i et b_i pour $i = 0, 1, 2, 3$.
4. Ecrire une fonction qui prend en entrée un entier n et qui renvoie les n-ème termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Ecrire une autre fonction qui prend en entrée un réel ε et qui calcule les termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tant que $|a_n - b_n| \geq \varepsilon$, puis qui renvoie l'approximation de $\sqrt{2}$ à au plus ε près.
6. Modifier la fonction précédente pour renvoyer également le nombre de termes que l'on doit calculer pour chaque suite pour avoir une précision à au plus ε près.

Exercice 1.2 Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = (-x+2)\mathrm{e}^x - 2$.

1. **Sur Python.**Tracer la fonction g sur l'intervalle $[0; 3]$.
2. A l'aide de votre tracé, que pouvez-vous conjecturer sur les solutions de l'équation $g(x) = 0$?
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle, notée α.
4. Montrer que $\alpha \in]1; 2[$.
5. Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.
6. **Sur Python.** A l'aide de la méthode de dichotomie, donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2 Méthode de Newton

2.1 Le principe

On suppose de plus dans cette partie que f est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle $[a; b]$. Soit x_0 une valeur approchée grossière de α.

Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Le réel α est alors l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses. L'idée est alors de remplacer $\mathcal{C}_f$ par sa tangente en x_0. Cette tangente rencontre l'axe (Ox) en un point d'abscisse x_1 ; en général x_1 est une meilleure approximation de α que x_0.

Exercice 2.1 On considère toujours la fonction $f : x \in [1; 4] \mapsto x^2 - 2$.

1. Calculer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x_0 = 3$ et en $x_0 = 2$.
2. En déduire x_1 dans chacun des deux cas. Quelle valeur approchée de $\sqrt{2}$ obtient-on pour $x_0 = 3$? Pour $x_0 = 2$?

L'algorithme de Newton consiste à itérer ce raisonnement. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n).}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème : (Méthode de Newton)

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique réel α solution de $f(x) = 0$ sur $]a; b[$.

2.2 A vous de jouer

Exercice 2.2

1. Montrer que la suite obtenue pour la fonction $f : x \in [1; 4] \mapsto x^2 - 2$ par l'algorithme de Newton est définie par $x_0 \in [1; 4]$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$
Dans la suite, on prend $x_0 = 3$.
2. Ecrire une fonction qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de x_n.
3. Ecrire une fonction qui prend en entrée un réel ε et qui renvoie une approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Newton avec la condition d'arrêt $|x_n - \sqrt{2}| \leq \varepsilon$.
4. Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie également le nombre de termes de la suite $(x_n)_n$ que l'on doit calculer pour avoir une précision à au plus ε près.
5. Prendre $\varepsilon = 10^{-11}$ et comparer le résultat obtenu pour la méthode de Newton et pour la méthode de la dichotomie.

Exercice 2.3

1. En s'inspirant des programmes précédents, donner une approximation à 10^{-11} près de $\sqrt{3}$.
2. En s'inspirant des programmes précédents, donner une approximation à 10^{-11} près de $\sqrt[3]{2}$.