Calculs de sommes avec une boucle `for`

1 Un premier exemple guidé

On considère la fonction suivante :

```
def calcul_somme(n):
  S=0
  for k in range(1, n+1):
    S=S+k
  return(S)
```

- ▷ Recopier la fonction ci-dessus dans un nouveau script.
- ▷ Tester la fonction dans la console pour différents entiers naturels n. A quoi correspond la valeur de S à la fin de la boucle ?

- ▷ Vérifier à l'aide d'une formule sur les sommes usuelles.

2 A vous de jouer

Exercice 2.1 1. En s'inspirant de la fonction `calcul_somme`, écrire de nouvelles fonctions pour calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} k^2$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^3$ (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^3$

2. **Sur feuille :** Vérifier les résultats à l'aide des formules sur les sommes usuelles.
On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 2.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{n} (k^2 + 4k + 4).$$

1. Ecrire une fonction ayant comme argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de S_n.
2. **Sur feuille :** En utilisant la linéarité de la somme, calculer S_n.
3. **Sur feuille :** En utilisant une identité remarquable et un changement d'indice, retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 2.3

1. En s'inspirant de la fonction de la Partie 1, écrire une nouvelle fonction ayant comme argument d'entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de $n!$
2. Ecrire une fonction pour calculer les produits suivants :

   (a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{5} \frac{2^{2k}}{3^k}$ (b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{10} \frac{2^{2k}}{3^k}$ (c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{5} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ (d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{10} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

3. **Sur feuille :** Vérifier les résultats obtenus en calculant « à la main » ces produits.

3 Si vous avez déjà tout terminé

Exercice 3.1

1. Ecrire une fonction ayant comme argument d'entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$
2. Ecrire une fonction ayant comme argument d'entrée un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de
$$T_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$
3. Evaluer les deux fonctions précédentes pour différentes valeurs de n et émettre une conjecture sur T_n et S_n.
4. **Sur feuille :** Montre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$
5. **Sur feuille :** Démontrer la conjecture.