Calcul intégral et sommes de Riemann

1 Introduction

Dans cette section, on considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et on cherche à obtenir un calcul approché de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)dt$$

Rappelons que, par définition, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ désigne l'aire algébrique sous la courbe $\mathcal{C}_f$: elle est comptée positivement lorsque f est positive et négativement lorsque f est négative.

L'idée est ici d'approcher cette aire sous la courbe par l'aire de figures géométriques simples, à savoir des rectangles.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On approche la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par la valeur I_n suivante :

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Représentons ensemble cette somme pour différentes valeurs de n dans le cas où $a = 0$ et $b = 1$.

La somme I_n est appelée la n-ième somme de Riemann. Elle fournit une approximation de l'aire algébrique sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre a et b et permet de définir de manière rigoureuse la notion d'intégrale :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \tag{1}$$

On parle de l'intégrale (au sens) de Riemann de la fonction f entre a et b.

Cas particulier : Si f est une fonction continue sur $[0, 1]$, alors $a = 0, b = 1$ et on obtient la formule suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx \tag{2}$$

2 Une première application

Comme on l'a vu en cours, ce résultat peut nous permettre de calculer la limite de certaines suites.

Exercice 2.1 **A faire à la main.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 2.2 **A faire à la fin du TP si il reste du temps**. Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}$
2. $v_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

3 Une seconde application

Les égalités (1) et (2) nous fournissent un moyen de calculer numériquement une valeur approchée de l'intégrale.

En effet, à l'aide de Python, pour un entier n donné, il est facile de calculer la valeur de la somme de Riemann I_n. Or l'égalité (1) nous dit que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

On peut donc estimer que pour « n suffisamment grand », la somme de Riemann I_n est proche de la valeur de l'intégrale de la fonction f sur $[a;b]$.

Mettons cela en oeuvre sur un cas particulier.

Exercice 3.1 On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. Définir la fonction f en Python puis la tracer sur l'intervalle $[0;1]$.
   On pourra pour la tracer importer la bibliothèque `matplotlib.pyplot` puis utiliser la commande `plt.plot`
2. Construire une fonction `SommedeRiemann1` qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, retourne la n-ième somme de Riemann I_n associée à f sur l'intervalle $[0;1]$.
3. En testant avec différentes valeurs de n, constater que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{4}$.
4. Construire une fonction `vitesse1` qui permet de calculer et d'afficher le plus petit entier naturel n tel que

   $$\left|I_n - \frac{\pi}{4}\right| < 10^{-3}.$$

   On pourra faire appel à la fonction `SommedeRiemann1`.

Exercice 3.2 *Le but de cet exercice est de vérifier expérimentalement, pour des fonctions f à primitive F connue, le lien entre primitive et intégrale, en comparant $F(b)-F(a)$ avec une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.*

Calculer les intégrales suivantes à la main puis vérifier vos résultats en calculant leur valeur approchée en vous aidant des sommes de Riemann.

1. $A = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x$
2. $B = \displaystyle\int_{1/e^3}^{1/e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$
3. $C = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

4 Pour aller plus loin

Exercice 4.1 On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

1. Définir la fonction g sur `Python` puis la tracer sur l'intervalle $[-5; 5]$.
2. Construire une fonction `SommedeRiemann2` qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et deux nombres réels a et b, retourne la n-ième somme de Riemann I_n associée à g sur l'intervalle $[a; b]$.
3. En testant avec différentes valeurs de n, de a et de b, conjecturer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

La fonction $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ *est la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite. RDV en deuxième année.*