Simulation de variables aléatoires discrètes

Rappels.

- Vous aurez besoin d'effectuer l'importation : `import numpy.random as rd`
- L'instruction rd.random() renvoie un nombre réel au hasard dans le segment $]0,1[$.
- L'instruction rd.randint(n,m,p) renvoie p entiers compris au hasard entre n et $m-1$.

1 Lois discrètes usuelles

1.1 Loi uniforme

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
   Donner $X(\Omega), P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega), E(X)$ et $V(X)$
2. Proposer un exemple d'expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.
3. Écrire une fonction `loiuniforme` qui, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, permet de simuler et d'obtenir la valeur d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1.2 Loi de Bernoulli

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
   Donner $X(\Omega), P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega), E(X)$ et $V(X)$.
2. Proposer un exemple d'expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli.
3. Écrire une fonction `loibernoulli` utilisant l'instruction `rd.random` qui, étant donné $p \in]0,1[$, permet de simuler et d'obtenir la valeur d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

1.3 Loi binomiale

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres N et p.
   Donner $X(\Omega), P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega), E(X)$ et $V(X)$.
2. Proposer un exemple d'expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.
3. Écrire une fonction `loibinomiale` qui, étant donné $N \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$, permet de simuler et d'obtenir la valeur d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres N et p. Cette fonction utilisera la fonction `loibernoulli`.

1.4 Loi géométrique

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
   Donner $X(\Omega), P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega), E(X)$ et $V(X)$.
2. Proposer un exemple d'expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire qui suit une loi géométrique.
3. Écrire une fonction `loigeometrique` qui, étant donné $p \in]0,1[$, permet de simuler et d'obtenir la valeur d'une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre p. Cette fonction utilisera la fonction `loibernoulli`.

2 Extrait du sujet ECRICOME Voie E 2015

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose d'une urne opaque U contenant N boules indiscernables au toucher, $N-1$ blanches et 1 noire. On effectue des tirages sans remise dans l'urne U jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire. On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement "on tire une boule noire lors du i-ème tirage".
- B_i l'événement "on tire une boule blanche lors du i-ème tirage".

1. On simule 10000 cette expérience aléatoire.
   Recopier et compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire :

```
def simu(N):
    S=np.zeros(N)
    for k in range(10000):
        i=1
        M=N
        while ...................  :
            i=i+1
            M= ....................
        S[i-1]=S[i-1]+1
    return S

S=simu(5)
x=np.arange(1,6)
plt.bar(x,S/10000)
```

2. Exécutez-le. Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?
   Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geq 3$.
3. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(X=1), P(X=2)$ et $P(X=3)$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.