Suites récurrentes, le retour

Exercice 0.1 On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

1. **Python** Tracer le graphe de la fonction f .
2. Etudier les variations de la fonction $f(x) = e^x - x - 1$. En déduire son signe.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
4. Montrer que la seule limite finie possible de la suite (u_n) est 0.
5. **Etude numérique des différents comportements de la suite (u_n) grâce à Python**
 - (a) Ecrire une fonction Python prenant en entrée un entier n et un réel u_0 et qui renvoie un vecteur contenant les n premiers termes de la suite (u_n) de premier terme u_0 .
 - (b) Ecrire des instructions permettant de représenter graphiquement les n premiers termes de la suite pour un entier n donné.
 - (c) Tester vos différents programmes pour diverses valeurs de n et de u_0 . Qu'observez-vous? Que conjecturez-vous concernant le comportement asymptotique de (u_n) ?
6. **Etude théorique des différents comportements de la suite (u_n)**
 - (a) On suppose que $u_0 < 0$.
 - i. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n < 0$.
 - ii. En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.
 - (b) On suppose que $u_0 > 0$.
 - i. Montrer que la suite (u_n) est divergente.
 - ii. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
7. **Python** On suppose dans cette question que $u_0 = 1$.
 Construire une fonction qui, étant donné un réel A , permet d'obtenir le plus petit entier n tel que $u_n > A$.
 Tester pour différentes valeurs de A . Commenter.

Exercice 0.2 Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
 On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$.

1. **Python** Tracer le graphe de la fonction f sur $[0, 1]$.
2. Etudier les variations de f et montrer que $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien défini et que $v_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
4. Montrer que, si la suite (v_n) converge vers une limite finie ℓ alors ℓ est unique et déterminer sa valeur.
5. Montrer que, pour tout réel $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
6. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9}|u_n - \ell|$.
7. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |v_0 - \ell|$.
8. En déduire que (v_n) converge vers ℓ .
9. Déterminer un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|v_n - \ell| \leq 10^{-9}$.

10. Python

- (a) Construire une fonction Python qui, étant donné un entier n , calcule et renvoie v_n .
- (b) Ecrire des instructions permettant de représenter graphiquement les 10 premiers termes de la suite (v_n) .
- (c) Construire une fonction Python qui permet d'obtenir le plus petit entier naturel n tel que $|v_n - \ell| \leq 10^{-9}$.