

Calcul intégral et sommes de Riemann

1 Introduction

Dans cette section, on considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et on cherche à obtenir un calcul approché de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t) dt$$

Rappelons que, par définition, $\int_a^b f(t) dt$ désigne l'aire algébrique sous la courbe $\mathcal{C}_f$: elle est comptée positivement lorsque f est positive et négativement lorsque f est négative.

L'idée est ici d'approcher cette aire sous la courbe par l'aire de figures géométriques simples, à savoir des rectangles.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On approche la valeur de $\int_a^b f(t) dt$ par la valeur I_n suivante :

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

Représentons ensemble cette somme pour différentes valeurs de n dans le cas où $a = 0$ et $b = 1$.

La somme I_n est appelée la n -ième somme de Riemann. Elle fournit une approximation de l'aire algébrique sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre a et b et permet de définir de manière rigoureuse la notion d'intégrale :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \quad (1)$$

On parle de l'intégrale (au sens) de Riemann de la fonction f entre a et b .

Cas particulier : Si f est une fonction continue sur $[0, 1]$, alors $a = 0$, $b = 1$ et on obtient la formule suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx \quad (2)$$

2 Une première application

Comme on l'a vu en cours, ce résultat peut nous permettre de calculer la limite de certaines suites.

Exercice 2.1 A faire à la main. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$.

Exercice 2.2 A faire à la fin du TP si il reste du temps. Déterminer la limite des suites suivantes :

$$1. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k) - \ln(n)}{n}$$

$$2. v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

$$3. w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

3 Une seconde application

Les égalités (1) et (2) nous fournissent un moyen de calculer numériquement une valeur approchée de l'intégrale.

En effet, à l'aide de Python, pour un entier n donné, il est facile de calculer la valeur de la somme de Riemann I_n . Or l'égalité (1) nous dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_a^b f(t) dt.$$

On peut donc estimer que pour « n suffisamment grand », la somme de Riemann I_n est proche de la valeur de l'intégrale de la fonction f sur $[a; b]$.

Mettons cela en oeuvre sur un cas particulier.

Exercice 3.1 On considère la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

- Définir la fonction f en Python puis la tracer sur l'intervalle $[0; 1]$.
On pourra pour la tracer importer la bibliothèque `matplotlib.pyplot` puis utiliser la commande `plt.plot`
- Construire une fonction `SommeDeRiemann1` qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, retourne la n -ième somme de Riemann I_n associée à f sur l'intervalle $[0; 1]$.
- En testant avec différentes valeurs de n , constater que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi}{4}$.
- Construire une fonction `vitesse1` qui permet de calculer et d'afficher le plus petit entier naturel n tel que

$$\left| I_n - \frac{\pi}{4} \right| < 10^{-3}.$$

On pourra faire appel à la fonction `SommeDeRiemann1`.

Exercice 3.2 Le but de cet exercice est de vérifier expérimentalement, pour des fonctions f à primitive F connue, le lien entre primitive et intégrale, en comparant $F(b) - F(a)$ avec une valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$.

Calculer les intégrales suivantes à la main puis vérifier vos résultats en calculant leur valeur approchée en vous aidant des sommes de Riemann.

$$1. A = \int_1^{e^2} \frac{1}{(2x+1)^2} dx$$

$$2. B = \int_{1/e^3}^{1/e^2} \frac{dx}{x \ln(x)}$$

$$3. C = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

4 Pour aller plus loin

Exercice 4.1 On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

1. Définir la fonction g sur Python puis la tracer sur l'intervalle $[-5; 5]$.
2. Construire une fonction `SommeDeRiemann2` qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et deux nombres réels a et b , retourne la n -ième somme de Riemann I_n associée à g sur l'intervalle $[a; b]$.
3. En testant avec différentes valeurs de n , de a et de b , conjecturer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

La fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ est la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite. RDV en deuxième année.