

# Résolution approchée d'équations $f(x) = 0$

Considérons une fonction  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et supposons que  $f$  s'annule en une seule et unique valeur  $\alpha \in ]a; b[$  et change de signe. On ne peut pas forcément calculer explicitement  $\alpha$  et on doit parfois utiliser des méthodes de calcul approché pour avoir une bonne estimation de la valeur de  $\alpha$ .

Nous présentons ici deux méthodes numériques, la méthode de la dichotomie et la méthode de Newton, qui permettent d'obtenir une valeur approchée de  $\alpha$ .

## 1 Méthode de la dichotomie

### 1.1 Le principe

La première méthode est basée sur le principe de dichotomie. Comme  $f$  s'annule et change de signe, on a en particulier  $f(a)f(b) < 0$ .

**Le principe.** On considère  $m = \frac{a+b}{2}$  le milieu du segment  $[a; b]$ . Alors deux cas sont possibles :

- soit  $f(a)f(m) \leq 0$  : alors  $f(a)$  et  $f(m)$  sont de signe opposé. Comme  $f$  est continue,  $f$  doit s'annuler sur  $[a; m]$  et donc  $\alpha \in [a; m]$ .
- soit  $f(m)f(b) \leq 0$  : alors  $f(m)$  et  $f(b)$  sont de signe opposé et de la même façon  $\alpha \in [m; b]$ .

On recommence alors le raisonnement précédent avec l'intervalle obtenu contenant  $\alpha$ .

On construit une suite d'intervalles  $[a_n; b_n]$  contenant  $\alpha$ .

Pour cela, on définit trois suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et

- si  $f(a_n)f(m_{n+1}) \leq 0$  alors  $a_{n+1} = a_n$  **et**  $b_{n+1} = m_{n+1}$ .
- si  $f(m_{n+1})f(b_n) \leq 0$  alors  $a_{n+1} = m_{n+1}$  **et**  $b_{n+1} = b_n$ .

On a alors le théorème suivant :

#### Théorème (Méthode de la dichotomie)

Les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes et elles convergent vers  $\alpha$  l'unique solution de  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[a; b]$ .

### 1.2 A vous de jouer

**Exercice 1.1** On considère la fonction  $f : x \in [1; 4] \mapsto x^2 - 2$ .

1. Tracer la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1; 4]$  avec Python.  
On constate que  $f$  s'annule et change de signe sur l'intervalle  $[1; 4]$ .
2. Résoudre, à la main, l'équation  $f(x) = 0$  pour  $x \in [1; 4]$ .
3. Calculer dans ce cas  $a_i$  et  $b_i$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$ .
4. Ecrire une fonction qui prend en entrée un entier  $n$  et qui renvoie les  $n$ -ème termes des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
5. Ecrire une autre fonction qui prend en entrée un réel  $\varepsilon$  et qui calcule les termes des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tant que  $|a_n - b_n| \geq \varepsilon$ , puis qui renvoie l'approximation de  $\sqrt{2}$  à au plus  $\varepsilon$  près.
6. Modifier la fonction précédente pour renvoyer également le nombre de termes que l'on doit calculer pour chaque suite pour avoir une précision à au plus  $\varepsilon$  près.

**Exercice 1.2** Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = (-x + 2)e^x - 2$ .

1. **Sur Python.** Tracer la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; 3]$ .
2. A l'aide de votre tracé, que pouvez-vous conjecturer sur les solutions de l'équation  $g(x) = 0$  ?
3. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution non nulle, notée  $\alpha$ .
4. Montrer que  $\alpha \in ]1; 2[$ .
5. Etudier le signe de  $g(x)$  sur  $[0; +\infty[$ .
6. **Sur Python.** A l'aide de la méthode de dichotomie, donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

## 2 Méthode de Newton

### 2.1 Le principe

On suppose de plus dans cette partie que  $f$  est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle  $[a; b]$ . Soit  $x_0$  une valeur approchée grossière de  $\alpha$ .

Notons  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ . Le réel  $\alpha$  est alors l'abscisse du point d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}_f$  avec l'axe des abscisses. L'idée est alors de remplacer  $\mathcal{C}_f$  par sa tangente en  $x_0$ . Cette tangente rencontre l'axe  $(Ox)$  en un point d'abscisse  $x_1$ ; en général  $x_1$  est une meilleure approximation de  $\alpha$  que  $x_0$ .

**Exercice 2.1** On considère toujours la fonction  $f : x \in [1; 4] \mapsto x^2 - 2$ .

1. Calculer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $x_0 = 3$  et en  $x_0 = 2$ .
2. En déduire  $x_1$  dans chacun des deux cas. Quelle valeur approchée de  $\sqrt{2}$  obtient-on pour  $x_0 = 3$ ? Pour  $x_0 = 2$  ?

L'algorithme de Newton consiste à itérer ce raisonnement. On définit ainsi une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

On a alors le théorème suivant :

**Théorème :** (Méthode de Newton)

La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'unique réel  $\alpha$  solution de  $f(x) = 0$  sur  $]a; b[$ .

### 2.2 A vous de jouer

**Exercice 2.2** 1. Montrer que la suite obtenue pour la fonction  $f : x \in [1; 4] \mapsto x^2 - 2$  par l'algorithme de Newton est définie par  $x_0 \in [1; 4]$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Dans la suite, on prend  $x_0 = 3$ .

2. Ecrire une fonction qui prend en entrée un entier naturel  $n$  et renvoie la valeur de  $x_n$ .
3. Ecrire une fonction qui prend en entrée un réel  $\varepsilon$  et qui renvoie une approximation de  $\sqrt{2}$  par la méthode de Newton avec la condition d'arrêt  $|x_n - x_{n+1}| \leq \varepsilon$ .
4. Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie également le nombre de termes de la suite  $(x_n)_n$  que l'on doit calculer pour avoir une précision à au plus  $\varepsilon$  près.
5. Prendre  $\varepsilon = 10^{-11}$  et comparer le résultat obtenu pour la méthode de Newton et pour la méthode de la dichotomie.

**Exercice 2.3** 1. En s'inspirant des programmes précédents, donner une approximation à  $10^{-11}$  près de  $\sqrt{3}$ .

2. En s'inspirant des programmes précédents, donner une approximation à  $10^{-11}$  près de  $\sqrt[3]{2}$ .