

**MATHÉMATIQUES APPROFONDIES**  
**ECG1**  
**PROGRESSION DE COURS, DÉTAIL DES CHAPITRES**

*SEMESTRE 1*

**Chapitre 1 : Rappel sur le calcul algébrique. Eléments de logiques et raisonnements.**

- Calcul dans les réels (fractions, puissance, identités remarquables, racines carrées)
- Orde dans les réels (inégalités, intervalles)
- Equations et inéquations (degré 1, degré 2, quotient et racines)
- Connecteurs (et, ou, non, implication, réciproque, contraposée) et quantificateurs :  $\forall, \exists$ .

**Chapitre 2 : Exemples de suites réelles**

- Vocabulaire de base sur les suites (définition, monotonie...)
- Suites minorée, majorée, bornée
- Suites arithmético-géométriques
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Chapitre 3 : Récurrences, sommes et produits**

- Principe de récurrence
- Sommes (signe  $\Sigma$ , changement d'indices, télescopage...  $\sum_{k=0}^n q^k, \sum_{k=1}^n k$ )
- Produit (signe  $\Pi$ , télescopage...)
- Définition de  $n!$
- Binôme de Newton, triangle de Pascal, coefficients binomiaux

**Chapitre 4 : Fonctions usuelles**

- Rappel sur les fonctions (domaine de définition, courbe, parité, monotonie, minorant, majorant, fonction périodique)
- Fonctions usuelles (puissance, logarithme népérien, exponentielle, racine carrée, fonction inverse, fonction puissance, fonction valeur absolue, fonction partie entière, fonction cosinus, sinus, tangente et arctangente)
- Formule de trigonométrie
- Dérivation (rappel des formules et équation de la tangente)

**Chapitre 5 : Systèmes linéaires**

- Définition, système homogène, système de Cramer
- Pivot de Gauss

**Chapitre 6 : Calcul matriciel**

- Définition (matrices colonnes, matrices lignes, matrices triangulaires). Ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- Transposée d'une matrice. Transposition d'un produit. Matrices symétriques et antisymétriques.
- Opérations sur les matrices (somme, produit par un scalaire, produit matriciel)
- Ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Matrices triangulaires, diagonales.
- Inverse d'une matrice carrée. Inverse d'un produit. Transposition de l'inverse. Inversibilité d'une matrice diagonale, triangulaire. Formule pour  $n=2$ .
- Ecriture matriciel d'un système linéaire

**Chapitre 7 : Suites convergentes**

- Limite d'une suite. Suites convergentes. Unicité de la limite. Généralisation aux suites tendant vers  $\pm\infty$
- Limite des suites usuelles. Croissance comparée.
- Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre
- Existence d'une limite par encadrement.
- Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Théorème de la borne supérieure.
- Théorème de la limite monotone.
- Suites adjacentes.
- Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers  $\ell$  alors  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

**Chapitre 8 : Polynômes**

- Ensemble  $\mathbb{R}[x]$ . Opérations algébriques. Degré. Ensemble  $\mathbb{R}_n[x]$ .
- Division euclidienne.
- Racines, ordre de multiplicité d'une racine.
- Formule de Taylor pour un polynôme.
- Exemple simple de factorisation dans  $\mathbb{R}[x]$

**Chapitre 9 : Ensembles et applications**

- Ensemble, partie d'un ensemble (inclusion, appartenance)
  - Ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de E.
  - Complémentaire. Notation  $\bar{A}$ .
  - Union. Intersection. Distributivité. Lois de Morgan.
  - Définition du produit cartésien d'ensembles.
  - Applications. Définition. Composée de deux applications.
  - Applications injectives, surjectives et bijectives.

**Chapitre 10 : Limites et continuité**

- Limite d'une fonction en un point (unicité). Limites à gauche et à droite.
- Opérations sur les limites. Limite d'une fonction composée.
- Limites et ordre. Théorème d'encadrement.
- Croissance comparée avec exp et ln.
- Continuité en un point. Continuité à gauche et à droite.
- Prolongement par continuité en un point.
- Théorème de la limite monotone.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- Théorème de la bijection. Représentation graphique de la fonction réciproque.

**Chapitre 11 : Probabilités sur un univers fini**

- Vocabulaire (univers, événement, système complet d'événements fini)
- Définition d'une probabilité. Formule de Poincaré pour 2 ou 3 événements.
- Dénombrement. Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Formule
 
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$
 Formules  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$  et  $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$
- Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes.
- Indépendance de deux événements. Indépendance mutuelle.

**Chapitre 12 : Introduction aux espaces vectoriels**

- Structure d'espace vectoriel.
- Sous-espaces vectoriels.
- Combinaisons linéaires.
- Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.
- Familles libre, génératrice. Bases.
- Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base.

**Chapitre 13 : Dérivation**

- Dérivées à gauche et à droite. Dérivée en un point.
- Opérations sur les dérivées. Linéarité de la dérivation. Dérivation des fonctions composées. Dérivation des fonctions réciproques.
- Fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$
- Théorème de Rolle
- Egalité et inégalité des accroissements finis.
- Théorème de prolongement de la dérivée.

**Chapitre 14 : Variables aléatoires finies**

- Définition d'une variable aléatoire réelle, loi de probabilité d'une v.a.
- Système complet associé à une v.a.
- Espérance, variance, écart-type
- Linéarité, croissance de l'espérance. Théorème de transfert.
- Formule de Koenig-Huygens.
- Lois usuelles (Bernoulli, binomiale et uniforme)

**Chapitre 15 : Intégration sur un segment**

- Aire sous la courbe d'une fonction positive. Généralisation à une fonction de signe quelconque.
- Sommes de Riemann
- Linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance
- Primitive d'une fonction continue sur un intervalle
- Intégration par parties. Changement de variables.

## SEMESTRE 2

### **Chapitre 16 : Applications linéaires et compléments sur les espaces vectoriels**

- Définition d'une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$
- Composée de deux applications linéaires
- Isomorphisme. Endomorphisme. Ensemble  $\mathcal{L}(E)$
- Noyau et image d'une application linéaire.
- Somme de deux sous-espaces vectoriels.
- Somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Projecteurs associés à deux espaces supplémentaires.

### **Chapitre 17 : Dérivées successives**

- Fonctions  $p$  fois dérivables en un point.
- Fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle
- Opérations algébriques. Formule de Leibniz. Théorème de composition.
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor Lagrange

### **Chapitre 18 : Etude asymptotique des suites**

- Suites négligeables. Suites équivalentes.
- Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance

### **Chapitre 19 : Séries numériques**

- Convergence d'une série. Somme et reste d'une série convergente.
- Convergence des séries à termes positifs.
- Convergence des séries à termes positifs quand  $u_n \leq v_n$  et  $u_n \sim v_n$
- Convergence absolue implique la convergence
- Convergence des séries dans le cas où  $u_n = o(v_n)$  avec  $(v_n)$  série à termes positifs
- Convergence des séries de Riemann
- Série géométrique, géométrique dérivée première et seconde. Série exponentielle?
- Exemples d'étude de la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  pour l'étude de la suite  $(u_n)$

### **Chapitre 20 : Espaces vectoriels de dimension finie**

- Espaces admettant une famille génératrice finie. Existence de bases.
- Dimension d'un espace vectoriel. Caractérisation des bases.
- Rang d'une famille de vecteurs.
- Théorème de la base incomplète.
- Dimension d'un sous-espace vectoriel
- Existence d'un supplémentaire en dimension finie.
- Dimension de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Caractérisation de  $E = F \oplus G$  par la dimension et l'intersection de  $F$  et  $G$
- Rang d'une application linéaire. Théorème du rang.

### **Chapitre 21 : Compléments de probabilité**

- Probabilité, espace probabilisé, propriétés vraies presque sûrement. Evénements négligeables. Evénements presque-sûrs.
- Théorème de la limite monotone et conséquences
- Généralisation probabilités conditionnelles
- Généralisation de la notion d'indépendance

**Chapitre 22 : Relation de comparaisons entre fonctions**

- Fonction négligeable au voisinage de  $x_0$ . Fonction équivalente au voisinage de  $x_0$
- Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élevation à une puissance.

**Chapitre 23 : Intégrales généralisées**

- Intégrale sur un intervalle semi-ouvert
- Convergence de l'intégrale d'une fonction continue
- Règles de calcul sur les intégrales convergentes, linéarité, relation de Chasles, positivité, inégalités.
- Théorèmes de convergence pour  $f$  et  $g$  positives au voisinage de  $b$  dans les cas où  $f \leq g$ ,  $f \sim_b g$  ou  $f = o(g)$
- Convergence absolue implique convergence
- Convergence des intégrales de référence (Riemann et exponentielle)
- Intégration par parties. Changement de variables.

**Chapitre 24 : Variables aléatoires discrètes**

- Définition, loi d'une variable aléatoire réelle discrète
- Etude de la loi de  $Y = g(X)$
- Indépendance mutuelle.
- Espérance. Linéarité et croissance.
- Existence d'une espérance par domination.
- Théorème de transfert.
- Variance et écart-type. Formule de Koenig-Huygens.
- Introduction à la notion de fonction de répartition.
- Variables aléatoires usuelles. (Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson)

**Chapitre 25 : Matrices et applications linéaires**

- Représentation matricielle d'une application linéaire
- Lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires
- Rang d'une matrice.
- Matrices carrées et endomorphismes.
- Formule du binôme pour deux endomorphismes qui commutent.
- Lien entre les isomorphismes de  $E$  et les matrices inversibles.
- Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice carrée. Polynôme annulateur.

**Chapitre 26 : Développement limités**

- Définition d'un DL
- Formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$
- DL des fonctions usuelles ( $\exp$ ,  $\ln$ ,  $x \rightarrow (1+x)^\alpha$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ )
- Somme et produit de DL
- Allure locale d'une fonction admettant un DL

**Chapitre 27 : Couples de variables aléatoires**

- Caractérisation de la loi d'un couple  $(X, Y)$
- Indépendance de deux variables aléatoires.
- Stabilité des lois binomiales et de Poisson
- Loi et espérance de la variable aléatoire  $Z=g(X, Y)$ . Théorème de transfert.
- Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes

**Chapitre 28 : Extrema et convexité**

- Existence d'extrême globaux pour une fonction continue sur un segment
- Condition nécessaire d'existence pour les fonctions  $\mathcal{C}^1$
- Définition d'un point critique.
- Condition suffisante pour les fonctions  $\mathcal{C}^2$
- Définition fonction convexe, concave
- Généralisation de l'inégalité de convexité
- Caractérisation des fonctions convexes de classe  $\mathcal{C}^1$
- Caractérisation des fonctions convexes de classe  $\mathcal{C}^2$
- Condition suffisante pour l'existence d'un minimum global d'une fonction convexe
- Point d'inflexion
- Utilisation récapitulative de tous les outils d'analyse pour l'étude graphique des fonctions. Tangentes. Convexité. Asymptotes éventuelles.

**Chapitre 29 : Convergences et approximation de variables aléatoires**

- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev
- Loi faible des grands nombres
- Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson