Interrogation n° 9

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soient P et Q deux polynômes, compléter les assertions suivantes :

   - $\deg(\lambda \cdot P) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
   - $\deg(P+Q) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   - $\deg(PQ) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, énoncer la formule de Taylor en un point $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$. Ecrire la formule de Taylor pour $a = 2$.

Exercice 2

Factoriser au maximum le polynôme $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - x - 2$.

Corrigé : Interrogation n° 9

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soient P et Q deux polynômes, compléter les assertions suivantes :
   - $\deg(\lambda \cdot P) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
   - $\deg(P+Q) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   - $\deg(PQ) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, énoncer la formule de Taylor en un point $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$. Ecrire la formule de Taylor pour $a = 2$.

> On a : $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k$, calculons les dérivées de P, on a :
>
> $$P^{(0)}(x) = P(x) \quad \text{donc} \quad P(2) = 8 - 2 \times 4 - 2 + 1 = -1$$
> $$P^{(1)}(x) = P'(x) = 3x^2 - 4x - 1 \quad \text{donc} \quad P'(2) = 3 \times 4 - 4 \times 2 - 1 = 3$$
> $$P^{(2)}(x) = 6x - 4 \quad \text{donc} \quad P^{(2)}(2) = 8$$
> $$P^{(3)}(x) = 6 \quad \text{donc} \quad P^{(3)}(2) = 6$$
>
> Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
>
> $$P(x) = -1 + 3(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 = -1 + 3(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

Exercice 2

Factoriser au maximum le polynôme $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - x - 2$.

> On commence par chercher une racine évidente. On a $P(-1) = 0$. Ainsi il existe $Q \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$. Pour déterminer Q, effectuons la division euclidienne de P par $x+1$.
>
> $$\begin{array}{rrrr|l} 6x^3 & +7x^2 & -x & -2 & x+1 \\ \cline{5-5} 6x^3 & +6x^2 & & & 6x^2+x-2 \\ \cline{1-2} & x^2 & -x & -2 & \\ & x^2 & +x & & \\ \cline{2-3} & & -2x & -2 & \\ & & -2x & -2 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$
>
> Ainsi $Q(x) = 6x^2 + x - 2$. Il reste à factoriser le polynôme Q. On a $\Delta = 49$ et donc $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{49}}{12} = -\dfrac{2}{3}$ et

$x_2 = \dfrac{-1+7}{12} = \dfrac{1}{2}$. On a alors :

$$Q(x) = 6(x - x_1)(x - x_2).$$

Ainsi $P(x) = 6(x+1)(x + \dfrac{2}{3})(x - \dfrac{1}{2})$.

