Interrogation n° 8

Exercice 1

1. Donner les 4 formes indéterminées.
2. Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Citer le théorème d'encadrement.
3. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Citer le théorème de comparaison.
4. (a) Donner la définition de deux suites adjacentes.
   (b) Citer le théorème des suites adjacentes.

Exercice 2

On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
Ecrire une fonction Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la valeur de S_n.

Exercice 3

Dans chacun des cas, déterminer (si elle existe) la limite de la suite $(u_n)_n$. N'oubliez pas de justifier vos réponses.

1. $u_n = \dfrac{-n^3+3n^2-1}{3n^3-n+2}$
2. $u_n = \dfrac{5n-\sqrt{n}}{3n+\sqrt{n}}$
3. $u_n = \dfrac{5^n}{7^n}$
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

Corrigé : Interrogation n° 8

Exercice 1

1. Donner les 4 formes indéterminées.

> $+\infty - \infty$ et $\infty \times 0$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$

2. Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Citer le théorème d'encadrement.

> Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que :
> — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leq w_n \leq v_n$
> — (u_n) et (v_n) sont convergentes vers une même limite ℓ.
> Alors la suite (w_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$.

3. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Citer le théorème de comparaison.

> Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq v_n.$$
>
> — Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
> — Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

4. (a) Donner la définition de deux suites adjacentes.

> Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si elles vérifient les 3 conditions suivantes :
> — (u_n) est croissante
> — (v_n) est décroissante
> — $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

(b) Citer le théorème des suites adjacentes.

> Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de plus :
>
> $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Exercice 2

On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Ecrire une fonction Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la valeur de S_n.

```
def f(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+1/k**2
    return S
```

Exercice 3

Dans chacun des cas, déterminer (si elle existe) la limite de la suite $(u_n)_n$. N'oubliez pas de justifier vos réponses.

1. $u_n = \dfrac{-n^3+3n^2-1}{3n^3-n+2}$

A première vue, il s'agit d'une forme indéterminée. Il faut donc factoriser le numérateur et le dénominateur pour lever la forme indéterminée. On a :

$$u_n = \frac{n^3\left(-1+\frac{3n^3}{n^3}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(3-\frac{n}{n^3}+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{-1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}}{3-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{n^3} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^3}\right) = -1$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n^3} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}\right) = 3$. Ainsi par quotient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{3}.$$

2. $u_n = \dfrac{5n-\sqrt{n}}{3n+\sqrt{n}}$

A première vue, il s'agit d'une forme indéterminée. Il faut donc factoriser le numérateur et le dénominateur pour lever la forme indéterminée. On a :

$$u_n = \frac{n\left(5-\frac{\sqrt{n}}{n}\right)}{n\left(3+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)} = \frac{5-\frac{1}{\sqrt{n}}}{3+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3$. Ainsi par quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{3}.$$

3. $u_n = \dfrac{5^n}{7^n}$

On a :

$$u_n = \left(\frac{5}{7}\right)^n.$$

Or $\dfrac{5}{7} \in]-1;1[$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.