

Interrogation n° 7

Exercice 1 Questions de cours

1. Donner la valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$.
2. Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^n q^k$ et $\sum_{k=1}^n q^k$.
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1 , donner l'expression de u_n en fonction de n .
4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Ecrire avec des quantificateurs « La fonction f admet un minimum sur I ».
5. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $\llbracket m; n \rrbracket$ pour $m \leq n$?
6. Quelle égalité relie $n!$ et $(n+1)!$ pour $n \in \mathbb{N}$?
7. Donner l'expression (avec les factorielles) de $\binom{n}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
8. Enoncer la formule du binôme de Newton.
9. Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Comment définit-on la composée de f par g ? (On n'oubliera pas de préciser les conditions de cette définition).
10. (a) Quel est le domaine de définition de la fonction logarithme népérien?
(b) Tracer sa courbe représentative?
11. Compléter les assertions suivantes :
 - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \ln(ab) = \dots$
 - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \dots$
 - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \dots$
 - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = \dots$
 - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ln(\sqrt{a}) = \dots$
12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, comment définit-on x^α ? Pour quels x ?
13. Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = \dots$
14. (a) Sur quel domaine est défini la fonction tangente?
(b) Quelle est l'expression de sa dérivée?
(c) Sur quel domaine est défini la fonction arctangente?
(d) Quelle est l'expression de sa dérivée?
15. Soit $x \in \mathbb{R}$, comment définit-on $\lfloor x \rfloor$?
16. Soit une fonction f dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Donner l'expression de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .
17. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition la matrice A est-elle inversible? Le cas échéant, donner son inverse.

Exercice 2

Développer l'expression suivante à l'aide du binôme de Newton : $(2+x)^6$.

Exercice 3

Simplifier les deux expressions suivantes :

$$A = \ln((3x-1)^2) - \ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) + \ln(\sqrt{3x-1}) - \ln\left(\frac{(3x-1)(x^2+1)}{2}\right)$$

$$B = \frac{e^{x^2+1} \times (e^{2x})^2}{e^{\ln(x)-x^2+4} \times e}$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{x^2 - 5x + 6}{x(e^x - 1)(x - 2)} \leq 0$.

Exercice 5

Déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=0}^n (6k - 4)$

2. $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^{2k}}{2^{k+2}}$

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

Exercice 7

Soit trois matrices A , P et D telles que la matrice P soit inversible et telle que $A = PDP^{-1}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 8

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x(e^x - 1)(x - 2)}\right)$.

Exercice 9

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_1 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$. Déterminer l'expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_{n+2}$.
Déterminer l'expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé : Interrogation n° 7

Exercice 1 Questions de cours

1. Donner la valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^n q^k$ et $\sum_{k=1}^n q^k$.

$$\begin{aligned} \text{Si } q = 1, \sum_{k=0}^n q^k &= n+1 \text{ et } \sum_{k=1}^n q^k = n. \\ \text{Si } q \neq 1, \sum_{k=0}^n q^k &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ et } \sum_{k=1}^n q^k = q \frac{1-q^n}{1-q}. \end{aligned}$$

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1 , donner l'expression de u_n en fonction de n .

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 q^{n-1}.$$

4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Ecrire avec des quantificateurs « La fonction f admet un minimum sur I ».

$$\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f(x_0)$$

5. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $\llbracket m; n \rrbracket$ pour $m \leq n$?

Il y a $n - m + 1$ entiers dans cet intervalle.

6. Quelle égalité relie $n!$ et $(n+1)!$ pour $n \in \mathbb{N}$?

$$(n+1)! = n! \times (n+1).$$

7. Donner l'expression (avec les factorielles) de $\binom{n}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Si } p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ et si } p > n, \binom{n}{p} = 0.$$

8. Énoncer la formule du binôme de Newton.

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

9. Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Comment définit-on la composée de f par g ? (On n'oubliera pas de préciser les conditions de cette définition).

La composée de f par g se note $g \circ f$, elle est définie sur $\mathcal{D}_f$, à condition que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ et on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

10. (a) Quel est le domaine de définition de la fonction logarithme népérien ?

$$\mathbb{R}_+^*$$

- (b) Tracer sa courbe représentative ?

cf cours

11. Compléter les assertions suivantes :

- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \ln(ab) = \dots$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \dots$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \dots$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = \dots$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ln(\sqrt{a}) = \dots$

- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a)$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, comment définit-on x^α ? Pour quels x ?

x^α est défini pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

13. Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = \dots$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|.$$

14. (a) Sur quel domaine est défini la fonction tangente ?

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- (b) Quelle est l'expression de sa dérivée ?

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(c) Sur quel domaine est défini la fonction arctangente ?

$$\mathbb{R}$$

(d) Quelle est l'expression de sa dérivée ?

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

15. Soit $x \in \mathbb{R}$, comment définit-on $\lfloor x \rfloor$?

$\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

16. Soit une fonction f dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Donner l'expression de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

17. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.

La matrice A est inversible ssi $ad - bc \neq 0$ et dans ce cas $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Exercice 2

Développer l'expression suivante à l'aide du binôme de Newton : $(2+x)^6$.

On a :

$$\begin{aligned} (2+x)^6 &= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 2^k \times x^{6-k} \\ &= x^6 + 6 \times 2x^5 + \binom{6}{2} \times 4x^4 + \binom{6}{3} \times 8x^3 + \binom{6}{4} \times 16x^2 + 6 \times 32x + 64 \\ &= x^6 + 12x^5 + 15 \times 4x^4 + 20 \times 8x^3 + 15 \times 16x^2 + 192x + 64 \\ &= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64 \end{aligned}$$

Exercice 3

Simplifier les deux expressions suivantes :

$$A = \ln((3x-1)^2) - \ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) + \ln(\sqrt{3x-1}) - \ln\left(\frac{(3x-1)(x^2+1)}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} A &= 2\ln(3x-1) - \ln(3x-1) + \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3x-1) - \ln(3x-1) - \ln(x^2+1) + \ln(2) \\ &= \frac{1}{2}\ln(3x-1) - \ln(x^2+1) + 2\ln(2) \end{aligned}$$

$$B = \frac{e^{x^2+1} \times (e^{2x})^2}{e^{\ln(x)-x^2+4} \times e}$$

$$B = \frac{e^{x^2+1+4x}}{xe^{-x^2+4+1}} = \frac{e^{x^2+4x+1+x^2-5}}{x} = \frac{e^{2x^2+4x-4}}{x}$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{x^2 - 5x + 6}{x(e^x - 1)(x - 2)} \leq 0$.

Dressons le tableau de signes de ce quotient. Pour cela, calculons les racines du polynôme $x^2 - 5x + 6$. On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$ et $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Puis résolvons : $e^x - 1 > 0$, on a :

$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0.$$

On a alors :

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$
$x - 2$		$-$	0	$+$		
x	$-$	0		$+$		
$e^x - 1$	$-$	0		$+$		
$\frac{x^2 - 5x + 6}{x(e^x - 1)(x - 2)}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	

On a alors $\mathcal{S} =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, 3]$.

Exercice 5

Déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=0}^n (6k - 4)$

On a :

$$\begin{aligned} S_n &= 6 \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 4 \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= 6 \times \frac{n(n+1)}{2} - 4(n+1) \\ &= (n+1) \times \left(\frac{6n}{2} - 4 \right) \\ &= (n+1)(3n-4) \end{aligned}$$

2. $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^{2k}}{2^{k+2}}$

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(3^2)^k}{2^2 \times 2^k} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{9}{2}\right)^k \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{9}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{9}{2}} \quad \text{car } \frac{9}{2} \neq 1 \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{-2}{7} \left(1 - \left(\frac{9}{2}\right)^{n+1}\right) \\
 &= -\frac{1}{14} \left(1 - \left(\frac{9}{2}\right)^{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$.

On a :

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 4I_3.$$

2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

On a donc $A^3 - A = 4I_3$ soit $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = I_3$. La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)$ soit :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Soit trois matrices A , P et D telles que la matrice P soit inversible et telle que $A = PDP^{-1}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

On démontre le résultat par récurrence. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $A^n = PD^nP^{-1}$. »

Initialisation ($n = 0$). $A^0 = I_n$ par convention et $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$. Ainsi $A^0 = PD^0P^{-1}$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
 A^{n+1} &= A \times A^n \\
 &= APD^nP^{-1}, \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= PDP^{-1}PD^nP^{-1}, \quad \text{car } A = PDP^{-1} \\
 &= PDI_nD^nP^{-1} \\
 &= PD^{n+1}P^{-1}
 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^n P^{-1}$.

Exercice 8

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x(e^x - 1)(x - 2)} \right)$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc d'après le tableau de signes dressé à l'exercice 4, on obtient que la fonction f est définie sur $]3, +\infty[$.

Exercice 9

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_1 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$. Déterminer l'expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On commence par chercher le réel α solution de l'équation $\alpha = 3\alpha - 4$. On obtient : $\alpha = 2$. Posons alors la suite $(v_n)_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= 3u_n - 4 - 2 \\ &= 3(u_n - 2) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_n$ est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $v_1 = u_1 - 2 = 5$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 5(3)^{n-1}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n = 2 + 5(3)^{n-1}}$.

Exercice 10

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_{n+2}$. Déterminer l'expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est alors $\alpha^2 = -\alpha + 1$. Le discriminant de cette équation vaut 5, elle possède donc deux racines valant $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Ainsi il existe des réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Il reste à déterminer λ et μ , on a :

$$u_0 = 0 = \lambda + \mu$$

et

$$u_1 = 1 = \lambda \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) + \mu \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Ainsi $\lambda = -\mu$ et on obtient $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = +\frac{1}{\sqrt{5}}$.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n}$.