Interrogation n° 7

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$.
2. Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Ecrire avec des quantificateurs : « La fonction f est décroissante sur I. »
4. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $[\![m; n]\!]$ pour $m \leq n$?
5. Donner la définition de $n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Donner l'expression (avec les factorielles) de $\binom{n}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
7. Enoncer la formule du triangle de Pascal.
8. Enoncer la formule du binôme de Newton.
9. Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Comment définit-on la composée de f par g ? (On n'oubliera pas de préciser les conditions de cette définition).
10. Donner les définitions d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
11. Citer l'inégalité triangulaire.
12. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, définir la valeur absolue de x.
    (b) Tracer le graphe de la fonction valeur absolue.
13. Soit $a \in \mathbb{R}_+$, compléter les équivalences suivantes :

$$|x| = a \iff \dots\dots\dots$$

$$|x| < a \iff \dots\dots\dots$$

$$|x| > a \iff \dots\dots\dots$$

14. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, recopiez complétez les égalités suivantes :

$$\cos(a+b) = \dots\dots\dots\dots \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \dots\dots\dots\dots$$

15. (a) Sur quel domaine est défini la fonction tangente ?
    (b) Quelle est l'expression de sa dérivée ?
    (c) Sur quel domaine est défini la fonction arctangente ?
    (d) Quelle est l'expression de sa dérivée ?
16. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.
17. Donner les quatre formes indéterminées pour les limites de suite.
18. Donner la définition (avec les ε) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
19. Donner les limites suivantes :
    (a) Soient a et b des réels strictement positifs, que vaut $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a}$?
    (b) Soit $a > 0$ et $q \in]-1; 1[$, que vaut $\lim_{n\to+\infty} n^a q^n$?
    (c) Soit $a > 0$ et $q > 1$, que vaut $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{q^n}$?

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\dfrac{x^2-7x+12}{(x+1)(x-5)} \geq 0.$

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n + \dfrac{1}{2}$.
Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 4

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5

Déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(5k-1)$
2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3^{k+1}}{2^k}$

Exercice 6

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{(x+1)(x-5)}}.$

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation : $A^2 - 5A - 2I_n = 0.$
La matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, déterminer son inverse.

Exercice 8

On considère la matrice : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J^n = 3^{n-1}J.$$

Exercice 9

Dans chacun des cas, déterminer (si elle existe) la limite de la suite $(u_n)_n$. N'oubliez pas de justifier vos réponses.

1. $u_n = \dfrac{-6n^2-n+1}{3n^2-n}$
2. $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{5^n}$
3. $u_n = \ln(n) - n$

Corrigé : Interrogation n° 7

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.
2. Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.
3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Ecrire avec des quantificateurs : « La fonction f est décroissante sur I. »
4. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $[\![m;n]\!]$ pour $m \leq n$?
5. Donner la définition de $n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Donner l'expression (avec les factorielles) de $\displaystyle\binom{n}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
7. Enoncer la formule du triangle de Pascal.
8. Enoncer la formule du binôme de Newton.
9. Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Comment définit-on la composée de f par g ? (On n'oubliera pas de préciser les conditions de cette définition).

> La composée de f par g se note $g \circ f$, elle est définie sur $\mathcal{D}_f$, à condition que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ et on a :
> $$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

10. Donner les définitions d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
11. Citer l'inégalité triangulaire.
12. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, définir la valeur absolue de x.
    (b) Tracer le graphe de la fonction valeur absolue.
13. Soit $a \in \mathbb{R}_+$, compléter les équivalences suivantes :
$$|x| = a \iff \dots\dots\dots$$
$$|x| < a \iff \dots\dots\dots$$
$$|x| > a \iff \dots\dots\dots$$
14. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, recopiez complétez les égalités suivantes :
$$\cos(a+b) = \dots\dots\dots\dots \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \dots\dots\dots\dots$$
15. (a) Sur quel domaine est défini la fonction tangente ?
    (b) Quelle est l'expression de sa dérivée ?
    (c) Sur quel domaine est défini la fonction arctangente ?
    (d) Quelle est l'expression de sa dérivée ?
16. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.
17. Donner les quatre formes indéterminées pour les limites de suite.
18. Donner la définition (avec les ε) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
19. Donner les limites suivantes :
    (a) Soient a et b des réels strictement positifs, que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a}$?

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0.$$

(b) Soit $a > 0$ et $q \in]-1;1[$, que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a q^n$?

$$\lim_{n\to+\infty} n^a q^n = 0.$$

(c) Soit $a > 0$ et $q > 1$, que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^a}{q^n}$?

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0.$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\dfrac{x^2-7x+12}{(x+1)(x-5)} \geq 0.$

Dressons le tableau de signes de ce quotient. Pour cela, calculons les racines du polynôme $x^2 - 7x + 12$. On a $\Delta = 7^2 - 4 \times 12 = 49 - 48 = 1$ et $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. On a alors :

x	$-\infty$		-1		3		4		5		$+\infty$
$x^2-7x+12$			$+$		0	$-$	0		$+$		
$x+1$		$-$	0			$+$					
$x-5$				$-$					0	$+$	
$\dfrac{x^2-7x+12}{(x+1)(x-5)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On a alors $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty,-1[\cup[3,4]\cup]5,+\infty[}$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n + \dfrac{1}{2}$.
Exprimer u_n en fonction de n.

On commence par chercher le réel α vérifiant

$$\alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}.$$

On obtient $\alpha = -1$.
On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 1$. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}(v_n - 1) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}v_n.$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 2$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Comme $u_n = v_n - 1$, on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1.$$

Exercice 4

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est la suivante : $r^2 = 4r - 4$. Ce qui équivaut à $(r-2)^2 = 0$. Ainsi elle possède une unique racine double $r_0 = 2$. Il existe donc λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + n\mu)2^n$.
Déterminons λ et μ. On a :

$$u_0 = 1 = \lambda \quad \text{et} \quad u_1 = 0 = (\lambda + \mu)2$$

Ainsi $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = (1-n)2^n}$.

Exercice 5

Déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(5k-1)$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}(5k-1)\\
&= \sum_{k=0}^{n}5k + \sum_{k=0}^{n}(-1) \qquad \text{par linéarité de la somme}\\
&= 5\left(\sum_{k=0}^{n}k\right) - \sum_{k=0}^{n}1\\
&= 5\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\\
&= (n+1)\left(\frac{5n}{2} - 1\right)\\
&= \frac{(n+1)(5n-2)}{2}.
\end{aligned}$$

2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3^{k+1}}{2^k}$

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{3 \times 3^k}{2^k} \\
&= 3 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k \\
&= 3 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}}\right) \\
&= 3 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= 3 \times \left(-\frac{2}{1}\right) \times \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= -6 \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 6

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 7x + 12}{(x+1)(x-5)}}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. On résout donc $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{(x+1)(x-5)} \geq 0$.
D'après l'exercice 2, on a donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup [3, 4] \cup]5, +\infty[}$.

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation : $A^2 - 5A - 2I_n = 0$.
La matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, déterminer son inverse.

On a :

$$A^2 - 5A - 2I_n = 0 \iff A^2 - 5A = 2I_n \iff A(A - 5I_n) = 2I_n \iff A \times \frac{1}{2}(A - 5I_n) = I_n.$$

Ainsi la matrice A est inversible et on a $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I_n)}$.

Exercice 8

On considère la matrice : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J^n = 3^{n-1} J.$$

On effectue le produit matriciel et on obtient $J^2 = 3J$.
Montrons ce résultat par récurrence. Posons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $J^n = 3^{n-1}J$ ».

Initialisation $(n = 1)$. On a $J^1 = J$ et $3^{1-1}J = 3^0 J = J$. Ainsi $J^1 = 3^{1-1}J$ et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J^n \times J \\ &= 3^{n-1} J \times J \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3^{n-1} 3J \qquad \text{car } J^2 = 3J \\ &= 3^{n-1+1} J \\ &= 3^n J. \end{aligned}$$

Ainsi $J^{n+1} = 3^n J$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à savoir :

$$J^n = 3^{n-1} J.$$

Exercice 9

Dans chacun des cas, déterminer (si elle existe) la limite de la suite $(u_n)_n$. N'oubliez pas de justifier vos réponses.

1. $u_n = \dfrac{-6n^2 - n + 1}{3n^2 - n}$

Factorisons par les termes prépondérants aux numérateur et dénominateur pour lever la forme indéterminée. On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{n^2\left(-6 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{-6 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n}}$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2}$.

2. $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{5^n}$

Pour lever la forme indéterminée, remarquons que :

$$u_n = 2\left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Comme $\dfrac{2}{5} \in]-1, 1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

3. $u_n = \ln(n) - n$

Factorisons par le terme prépondérant pour lever la forme indéterminée. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n\left(\frac{\ln(n)}{n} - 1\right).$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée donc par produit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$.