Interrogation n° 7

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
2. Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} q^k$ et $\sum_{k=1}^{n} q^k$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1, donner l'expression de u_n en fonction de n.
4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Ecrire avec des quantificateurs « La fonction f admet un minimum sur I ».
5. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $[\![m;n]\!]$ pour $m \leq n$?
6. Quelle égalité relie $n!$ et $(n+1)!$ pour $n \in \mathbb{N}$?
7. Donner l'expression (avec les factorielles) de $\binom{n}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
8. Enoncer la formule du binôme de Newton.
9. Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Comment définit-on la composée de f par g ? (On n'oubliera pas de préciser les conditions de cette définition).
10. (a) Quel est le domaine de définition de la fonction logarithme népérien ?
    (b) Tracer sa courbe représentative ?
11. Compléter les assertions suivantes :
    - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(ab) = \dots$
    - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \dots$
    - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \dots$
    - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = \dots$
    - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(\sqrt{a}) = \dots$
12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, comment définit-on x^α ? Pour quels x ?
13. Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = \dots$.
14. (a) Sur quel domaine est défini la fonction tangente ?
    (b) Quelle est l'expression de sa dérivée ?
    (c) Sur quel domaine est défini la fonction arctangente ?
    (d) Quelle est l'expression de sa dérivée ?
15. Soit $x \in \mathbb{R}$, comment définit-on $\lfloor x \rfloor$?
16. Soit une fonction f dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Donner l'expression de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.
17. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.
18. Donner les 4 formes indéterminées.
19. Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Citer le théorème d'encadrement.
20. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Citer le théorème de comparaison.
21. Donner la définition (avec les ε) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

Exercice 2

Développer l'expression suivante à l'aide du binôme de Newton : $(2+x)^6$.

Exercice 3

Simplifier les deux expressions suivantes :

$$A = \ln((3x-1)^2) - \ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) + \ln(\sqrt{3x-1}) - \ln\left(\frac{(3x-1)(x^2+1)}{2}\right)$$

$$B = \frac{\mathrm{e}^{x^2+1} \times (\mathrm{e}^{2x})^2}{\mathrm{e}^{\ln(x)-x^2+4} \times \mathrm{e}}$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\dfrac{x^2-5x+6}{x(\mathrm{e}^x-1)(x-2)} \leq 0.$

Exercice 5

Déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(6k-4)$
2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3^{2k}}{2^{k+2}}$

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

Exercice 7

Soit trois matrices A, P et D telles que la matrice P soit inversible et telle que $A = PDP^{-1}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 8

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}\right)$.

Exercice 9

Dans chacun des cas, déterminer (si elle existe) la limite de la suite $(u_n)_n$. N'oubliez pas de justifier vos réponses.

1. $u_n = \dfrac{-n^3+3n^2-1}{3n^3-n+2}$
2. $u_n = 5-(-1)^n$
3. $u_n = \dfrac{5n-\sqrt{n}}{3n+\sqrt{n}}$
4. $u_n = \dfrac{5^n}{7^n}$
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$

Corrigé : Interrogation n° 7

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} q^k$ et $\sum_{k=1}^{n} q^k$.

Si $q = 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$ et $\sum_{k=1}^{n} q^k = n$.
Si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $\sum_{k=1}^{n} q^k = q\frac{1-q^n}{1-q}$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1, donner l'expression de u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 q^{n-1}$.

4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Ecrire avec des quantificateurs « La fonction f admet un minimum sur I ».

$$\exists x_0 \in I, \forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_0)$$

5. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $[\![m;n]\!]$ pour $m \leq n$?

Il y a $n - m + 1$ entiers dans cet intervalle.

6. Quelle égalité relie $n!$ et $(n+1)!$ pour $n \in \mathbb{N}$?

$$(n+1)! = n! \times (n+1).$$

7. Donner l'expression (avec les factorielles) de $\binom{n}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

8. Enoncer la formule du binôme de Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

9. Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Comment définit-on la composée de f par g ? (On n'oubliera pas de préciser les conditions de cette définition).

> La composée de f par g se note $g \circ f$, elle est définie sur $\mathcal{D}_f$, à condition que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ et on a :
>
> $$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

10. (a) Quel est le domaine de définition de la fonction logarithme népérien ?

> $\mathbb{R}_+^*$

(b) Tracer sa courbe représentative ?

> cf cours

11. Compléter les assertions suivantes :
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(ab) = \dots$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \dots$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \dots$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = \dots$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(\sqrt{a}) = \dots$

> - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(ab) = \ln(a) + ln(b)$
> - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
> - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
> - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$
> - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, comment définit-on x^α ? Pour quels x ?

> x^α est défini pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.

13. Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = \dots$.

> $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

14. (a) Sur quel domaine est défini la fonction tangente ?

> $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(b) Quelle est l'expression de sa dérivée ?

> $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

(c) Sur quel domaine est défini la fonction arctangente ?

> $\mathbb{R}$

(d) Quelle est l'expression de sa dérivée ?

> $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

15. Soit $x \in \mathbb{R}$, comment définit-on $\lfloor x \rfloor$?

> $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif tel que $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$

16. Soit une fonction f dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Donner l'expression de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

> $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

17. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.

> La matrice A est inversible ssi $ad - bc \neq 0$ et dans ce cas $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

18. Donner les 4 formes indéterminées.

> $+\infty - \infty$ et $\infty \times 0$ et $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

19. Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Citer le théorème d'encadrement.

> cf cours

20. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Citer le théorème de comparaison.

> cf cours

21. Donner la définition (avec les ε) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

> $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Exercice 2

Développer l'expression suivante à l'aide du binôme de Newton : $(2+x)^6$.

> On a :
>
> $$\begin{aligned} (2+x)^6 &= \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^k \times x^{6-k} \\ &= x^6 + 6 \times 2x^5 + \binom{6}{2} \times 4x^4 + \binom{6}{3} \times 8x^3 + \binom{6}{4} \times 16x^2 + 6 \times 32x + 64 \\ &= x^6 + 12x^5 + 15 \times 4x^4 + 20 \times 8x^2 + 15 \times 16x^2 + 192x + 64 \\ &= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64 \end{aligned}$$

Exercice 3

Simplifier les deux expressions suivantes :

$$A = \ln((3x-1)^2) - \ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) + \ln(\sqrt{3x-1}) - \ln\left(\frac{(3x-1)(x^2+1)}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} A &= 2\ln(3x-1) - \ln(3x-1) + \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3x-1) - \ln(3x-1) - \ln(x^2+1) + \ln(2) \\ &= \frac{1}{2}\ln(3x-1) - \ln(x^2+1) + 2\ln(2) \end{aligned}$$

$$B = \frac{\mathrm{e}^{x^2+1} \times (\mathrm{e}^{2x})^2}{\mathrm{e}^{\ln(x)-x^2+4} \times \mathrm{e}}$$

$$B = \frac{\mathrm{e}^{x^2+1+4x}}{x\mathrm{e}^{-x^2+4+1}} = \frac{\mathrm{e}^{x^2+4x+1+x^2-5}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{2x^2+4x-4}}{x}$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $$\frac{x^2-5x+6}{x(\mathrm{e}^x-1)(x-2)} \leq 0.$$

Dressons le tableau de signes de ce quotient. Pour cela, calculons les racines du polynôme x^2-5x+6. On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$ et $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
Puis résolvons : $\mathrm{e}^x - 1 > 0$, on a :

$$\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0.$$

On a alors :

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6			$+$		0	$-$	0	$+$	
$x-2$			$-$		0		$+$		
x		$-$	0		$+$				
e^x-1		$-$	0		$+$				
$\dfrac{x^2-5x+6}{x(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On a alors $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, 3]}$.

Exercice 5

Déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(6k-4)$

On a :

$$\begin{aligned} S_n &= 6\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 4 \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= 6 \times \frac{n(n+1)}{2} - 4(n+1) \\ &= (n+1) \times \left(\frac{6n}{2} - 4\right) \\ &= (n+1)(3n-4) \end{aligned}$$

2. $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{2k}}{2^{k+2}}$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(3^2)^k}{2^2 \times 2^k} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{9}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{9}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{9}{2}} \quad \text{car } \frac{9}{2} \neq 0 \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{-2}{7}\left(1 - \left(\frac{9}{2}\right)^{n+1}\right) \\ &= -\frac{1}{14}\left(1 - \left(\frac{9}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$.

On a :

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 4I_3.$$

2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

On a donc $A^3 - A = 4I_3$ soit $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = I_3$. La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)$ soit :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Soit trois matrices A, P et D telles que la matrice P soit inversible et telle que $A = PDP^{-1}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

On démontre le résultat par récurrence. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $A^n = PD^nP^{-1}$.»

Initialisation $(n = 0)$. $A^0 = I_n$ par convention et $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$. Ainsi $A^0 = PD^0P^{-1}$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= APD^nP^{-1}, \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1}, \quad \text{car } A = PDP^{-1} \\ &= PDI_nD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 8

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x(\mathrm{e}^x - 1)(x-2)}\right)$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc d'après le tableau de signes dressé à l'exercice 4, on obtient que la fonction f est définie sur $]3, +\infty[$.

Exercice 9

Dans chacun des cas, déterminer (si elle existe) la limite de la suite $(u_n)_n$. N'oubliez pas de justifier vos réponses.

1. $u_n = \dfrac{-n^3 + 3n^2 - 1}{3n^3 - n + 2}$

A première vue, il s'agit d'une forme indéterminée. Il faut donc factoriser le numérateur et le dénominateur pour lever la forme indéterminée. On a :

$$u_n = \frac{n^3\left(-1 + \frac{3n^3}{n^3} - \frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(3 - \frac{n}{n^3} + \frac{2}{n^3}\right)} = \frac{-1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}.$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n^3} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-1 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{1}{n^3}\right) = -1$. De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n^3} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^3}\right) = 3$. Ainsi par quotient

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\frac{1}{3}.$$

2. $u_n = 5 - (-1)^n$

Montrons que cette suite est divergente.
Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
On a alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell.$$

Or $u_{2n} = 5 - (-1)^{2n} = 5 - 1 = 4$ et $u_{2n+1} = 5 - (-1)^{2n+1} = 5 + 1 = 6$. On obtient alors $4 = 6$, absurde !
Ainsi la suite $(u_n)_n$ est divergente.

3. $u_n = \dfrac{5n - \sqrt{n}}{3n + \sqrt{n}}$

> A première vue, il s'agit d'une forme indéterminée. Il faut donc factoriser le numérateur et le dénominateur pour lever la forme indéterminée. On a :
> $$u_n = \frac{n\left(5 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right)}{n\left(3 + \frac{\sqrt{n}}{n}\right)} = \frac{5 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$
> Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3$. Ainsi par quotient :
> $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{3}.$$

4. $u_n = \dfrac{5^n}{7^n}$

> On a :
> $$u_n = \left(\frac{5}{7}\right)^n.$$
> Or $\frac{5}{7} \in]-1;1[$ donc :
> $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

> On a pour $n \in \mathbb{N}$:
> $$u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$
> Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \quad$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.