Interrogation n° 6

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la définition de A est inversible.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.
3. Soit la matrice $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$. A quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.

Exercice 2

Résoudre le système suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & y & - & z & = & -1 \\ -x & - & y & + & 3z & = & 3 \end{array} \right.$$

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation suivante

$$A^3 - 2A + 3I_n = 0.$$

La matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, déterminer son inverse.

Corrigé : Interrogation n° 6

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la définition de A est inversible.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.
3. Soit la matrice $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$. A quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.

Exercice 2

Résoudre le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 2x - y + 2z = 5 \\ x + y - z = -1 \\ -x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - z = -1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ -x - y + 3z = 3 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x + y - z = -1 \\ \quad - 3y + 4z = 7 \\ \quad\quad 2z = 2 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

On a mis le système sous forme échelonné et on peut maintenant facilement le résoudre.

$$(S_2) \iff \begin{cases} x + y = -1 + z \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ainsi $\mathscr{S} = \{(1; -1; 1)\}$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation suivante

$$A^3 - 2A + 3I_n = 0.$$

La matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, déterminer son inverse.

On a :

$$A^3 - 2A = -3I_n \iff \frac{-1}{3}(A^3 - 2A) = I_n \iff A \times \left(-\frac{1}{3}(A^2 - 2I_n)\right) = I_n.$$

On a $AB = I_n$ avec $B = -\frac{1}{3}(A^2 - 2I_n)$ donc la matrice A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{3}(A^2 - 2I_n)$.