Interrogation n° 6

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premiers termes u_0, v_0 et w_0 et par les relations de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} = u_n - w_n \\ w_{n+1} = v_n + 4w_n \end{cases}$$
Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, est-elle inversible ? Si oui déterminer son inverse.

Exercice 3

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 4

Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 5 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

Corrigé : Interrogation n° 6

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

> La matrice A étant une matrice diagonale, on a simplement :
> $$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premiers termes u_0, v_0 et w_0 et par les relations de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} = u_n - w_n \\ w_{n+1} = v_n + 4w_n \end{cases}$$
Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

> Posons la matrice :
> $$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$
> on a alors :
> $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, est-elle inversible ? Si oui déterminer son inverse.

> On choisit la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice P :
> $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice obtenue est triangulaire supérieure avec tous ses pivots non nuls donc elle est inversible. Par théorème, la matrice P est elle aussi inversible. Poursuivons la méthode :

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Donc, la matrice P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

La matrice A est de taille 2, calculons $ad - bc$.

$$ad - bc = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0.$$

Ainsi la matrice A est inversible et son inverse est donné par :

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 5 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

On a :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 5 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3$$

Donc, P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{4} Q = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.