

Interrogation n° 5

Exercice 1 Questions de cours

1. Compléter le tableau suivant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$					
$\sin x$					

2. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, complétez les égalités suivantes :

$$\cos(a + b) = \dots\dots\dots$$

$$\sin(a + b) = \dots\dots\dots$$

3. Soit la fonction tangente $h : x \mapsto \tan(x)$.

(a) Donner le domaine de définition de h .

(b) Donner la parité de h .

(c) Donner la périodicité de h .

(d) Donner la dérivée de h .

(e) Donner les variations de h sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(f) Tracer l'allure de sa courbe représentative sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4. Soit la fonction arctangente définie par $u : x \mapsto \arctan(x)$.

(a) Donner le domaine de définition de u .

(b) Donner la dérivée de u .

(c) Donner les variations de u .

(d) Tracer l'allure de sa courbe représentative sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(e) Complétez les énoncés suivants :

$$\forall x \in \dots\dots, \quad \tan(\arctan(x)) = \dots\dots$$

$$\forall x \in \dots\dots, \quad \arctan(\tan(x)) = \dots\dots$$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(2x + 1) + \ln(x + 3) = 2 \ln(x - 1)$ sur $I =]1, +\infty[$

2. $e^{3x} e^{x^2} < e^2$ sur $I = \mathbb{R}$

Corrigé : Interrogation n° 5

Exercice 1 Questions de cours

1. Compléter le tableau suivant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$					
$\sin x$					

2. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, complétez les égalités suivantes :

$$\cos(a + b) = \dots\dots\dots$$

$$\sin(a + b) = \dots\dots\dots$$

3. Soit la fonction tangente $h : x \mapsto \tan(x)$.

(a) Donner le domaine de définition de h .

$$\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(b) Donner la parité de h .

g est une fonction impaire.

(c) Donner la périodicité de h .

La fonction h est π -périodique.

(d) Donner la dérivée de h .

$$g'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(e) Donner les variations de h sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

h est croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

(f) Tracer l'allure de sa courbe représentative sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Voir cours.

4. Soit la fonction arctangente définie par $u : x \mapsto \arctan(x)$.

(a) Donner le domaine de définition de u .

$$\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$$

(b) Donner la dérivée de u .

$$u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(c) Donner les variations de u .

u est croissante sur $\mathbb{R}$.

(d) Tracer l'allure de sa courbe représentative sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Voir cours.

(e) Complétez les énoncés suivants :

$$\forall x \in \dots, \quad \tan(\arctan(x)) = \dots$$

$$\forall x \in \dots, \quad \arctan(\tan(x)) = \dots$$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(2x+1) + \ln(x+3) = 2\ln(x-1)$ sur $I =]1, +\infty[$

Soit $x \in I$ on a :

$$\begin{aligned} \ln(2x+1) + \ln(x+3) = 2\ln(x-1) &\iff \ln((2x+1)(x+3)) = \ln((x-1)^2) \iff (2x+1)(x+3) = (x-1)^2 \\ &\iff 2x^2 + 7x + 3 = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 + 9x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Calculons le discriminant de ce polynôme de degré 2, on a :

$$\Delta = (9)^2 - 4 \times (2) = 81 - 8 = 73 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-9 - \sqrt{73}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{73}}{2}$$

On remarque que $x_1 < 0$ donc $x_1 \notin I$ et que $\sqrt{64} \leq \sqrt{73} \leq \sqrt{81}$ ainsi $\sqrt{73} > 8$ et donc $x_2 < 0$ également. Finalement $S = \emptyset$.

2. $e^{3x}e^{x^2} < e^2$ sur $I = \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{3x}e^{x^2} < e^2 \iff e^{3x+x^2} < e^2 \iff 3x+x^2 < 2 \iff x^2+3x-2 < 0.$$

Calculons le discriminant de ce polynôme de degré 2, on a :

$$\Delta = (3)^2 - 4 \times (-2) = 17 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Finalement } S = \left] \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right[.$$